А.П. РЯБУШКО

ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

В четырех частях

Часть 4

Операционное исчисление. Элементы теории устойчивости. Теория вероятностей. Математическая статистика

Допущено
Министерством образования Республики Беларусь
в качестве учебного пособия для студентов
технических специальностей учреждений,
обеспечивающих получение
высшего образования

2-е издание, исправленное

Минск
«Вышэйшая школа»
2007

УДК 517(076.1)(075.8)
ББК 22.1я73
Р98

Рецензенты: кафедра высшей математики № 1 Белорусского национального технического университета; доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического моделирования и анализа данных Белорусского государственного университета *Е.Е. Жук*

Рябушко, А. П.

Р98 Индивидуальные задания по высшей математике. В 4 ч. Ч. 4. Операционное исчисление. Элементы теории устойчивости. Теория вероятностей. Математическая статистика : учеб. пособие / А. П. Рябушко. – 2-е изд., испр. – Минск : Выш. шк., 2007. – 336 с. : ил.

ISBN 978-985-06-1312-7.

Это четвертая, заключительная, книга комплекса учебных пособий по курсу высшей математики, направленных на развитие и активизацию самостоятельной работы студентов технических вузов. Содержатся теоретические сведения и наборы задач для аудиторных и индивидуальных заданий.

Предыдущее издание вышло в 2006 г.

Для студентов технических специальностей вузов. Будет полезно студентам экономических специальностей, а также преподавателям вузов, колледжей и техникумов.

УДК 517(076.1)(075.8)
ББК 22.1я73

Учебное издание

Рябушко Антон Петрович

ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

В четырех частях

Часть 4

Операционное исчисление. Элементы теории устойчивости. Теория вероятностей. Математическая статистика

Учебное пособие

Редактор *М.С. Молчанова*. Художественный редактор *В.А. Ярошевич*. Технический редактор *Н.А. Лебедевич*. Корректор *В.И. Аверкина*. Набор и компьютерная верстка *Ю.Л. Шибаевой*.

Подписано в печать 29.08.2007. Формат 84×108/32. Бумага типографская № 2. Гарнитура «Ньютон». Усл. печ. л. 17,64. Уч.-изд. л. 17,02. Тираж 3000 экз. Заказ 2209.

Республиканское унитарное предприятие «Издательство “Вышэйшая школа”». ЛИ № 02330/0131768 от 06.03.2006. 220048, Минск, проспект Победителей, 11.
www.vshph.com

Республиканское унитарное предприятие «Издательство “Белорусский Дом печати”». 220013, Минск, проспект Независимости, 79.

ISBN 978-985-06-1312-7 (ч. 4)
ISBN 978-985-06-1337-0

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемая вниманию читателя книга завершает комплекс учебных пособий под общим названием «Индивидуальные задания по высшей математике». Он написан в соответствии с действующими программами курса высшей математики в объеме 380–450 часов для инженерно-технических специальностей вузов. Комплекс может быть использован также в вузах других профилей, в которых количество часов, отведенное на изучение высшей математики, значительно меньше. (В последнем случае из предлагаемого материала рекомендуется сделать необходимую выборку.) Кроме того, он вполне доступен для студентов вечерних и заочных отделений вузов.

Данный комплекс пособий адресован преподавателям и студентам и предназначен для проведения практических аудиторных занятий, самостоятельных (мини-контрольных) работ и выдачи индивидуальных домашних заданий по всем разделам курса высшей математики.

С целью минимизации затрат времени при изучении предмета перед аудиторными и индивидуальными домашними заданиями приводятся необходимые определения, формулы, примеры с решениями, а после каждого индивидуального задания – решение типового варианта. К большинству предлагаемых задач даны ответы.

В четвертой книге комплекса содержится материал по операционному исчислению, элементам теории устойчивости, теории вероятностей, математической статистике. Ее структура аналогична структуре первых трех книг, а нумерация глав, параграфов и рисунков продолжает соответствующую нумерацию. В приложениях приведены таблицы оригиналов и их изображений, значений функций распределения, используемых в теории вероятностей и математической статистике, а также двухчасовая контрольная работа для блочных экзаменов.

Главы 18 и 19 данного пособия содержат исправленный и дополненный материал учебного пособия «Сборник индивидуальных заданий по теории вероятностей и математической статистике» авторов А.П. Рябушко, В.В. Бархатова, В.В. Державец, И.Е. Юрутя под общей редакцией профессора А.П. Рябушко, выпущенного издательством «Вышэйшая школа» в 1992 г.

Автор выражает искреннюю благодарность рецензентам – коллективу кафедры высшей математики № 1 Белорусского национального технического университета, возглавляемому доктором технических наук, профессором Н.А. Микуликом, и доктору физико-математических наук, профессору кафедры математического моделирования и анализа данных Белорусского государственного университета Е.Е. Жуку – за ценные замечания и советы, способствовавшие улучшению книги.

Все отзывы и пожелания просьба направлять по адресу: 220048, Минск, проспект Победителей, 11, издательство «Вышэйшая школа».

Автор

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

Охарактеризуем структуру пособия, методику его использования, организацию проверки и оценки знаний, навыков и умений студентов.

Весь практический материал по курсу высшей математики разделен на главы, в каждой из которых даются необходимые теоретические сведения (основные определения, формулировки теорем, формулы), используемые при решении задач и выполнении упражнений. Изложение этих сведений иллюстрируется решенными примерами. (Начало решения примеров обозначается символом ▸, а конец – ◂.) Затем даются подборки задач с ответами для всех практических аудиторных занятий (АЗ) и для самостоятельных (мини-контрольных) работ на 10–15 минут во время этих занятий. И, наконец, приводятся недельные индивидуальные домашние задания (ИДЗ), каждое из которых содержит 30 вариантов и сопровождается решением типового варианта. Часть задач из ИДЗ снабжена ответами. В конце каждой главы приводятся дополнительные задачи повышенной трудности и прикладного характера.

Нумерация АЗ сквозная и состоит из двух чисел: первое из них указывает на главу, а второе – на порядковый номер АЗ в этой главе. Например, шифр АЗ-16.1 означает, что АЗ относится к шестнадцатой главе и является первым по счету. В данной книге комплекса содержится 23 АЗ и 9 ИДЗ.

Для ИДЗ также принята нумерация по главам. Например, шифр ИДЗ-16.2 означает, что ИДЗ относится к шестнадцатой главе и является вторым. Внутри каждого ИДЗ принята следующая нумерация: первое число означает номер задачи в данном задании, а второе – номер варианта. Таким образом, шифр ИДЗ-16.2: 16 означает, что студент должен выполнять 16-й вариант из ИДЗ-16.2, который содержит задачи 1.16, 2.16, 3.16 и т.д.

При выдаче ИДЗ студентам номера́ выполняемых вариантов можно менять от задания к заданию по какой-либо системе или случайным образом. Более того, можно при выдаче ИДЗ любому студенту составить его вариант, комбинируя однотипные задачи из разных вариантов. Например, шифр

ИДЗ-16.1: 1.2; 2.4; 3.6; 4.1; 5.15 означает, что студенту следует решать в ИДЗ-16.1 первую задачу из варианта 2, вторую – из варианта 4, третью – из варианта 6, четвертую – из варианта 1 и пятую – из варианта 15. Такой комбинированный метод выдачи ИДЗ позволяет из 30 вариантов получить большое количество новых вариантов.

Внедрение ИДЗ в учебный процесс показало, что целесообразнее выдавать ИДЗ не после каждого АЗ (которых, как правило, два в неделю), а одно недельное ИДЗ, включающее основной материал двух АЗ этой недели.

Дадим некоторые общие рекомендации по организации работы студентов в соответствии с настоящим пособием.

1. В вузе студенческие группы по 25 человек, проводятся два АЗ в неделю, планируются еженедельные не обязательные для посещения студентами консультации, выдаются недельные ИДЗ. При этих условиях для систематического контроля с выставлением оценок, указанием ошибок и путей их исправления могут быть использованы выдаваемые каждому преподавателю матрицы ответов и банк листов решений, которые кафедра заготавливает для ИДЗ (студентам они не выдаются). Если матрицы ответов составляются для всех задач из ИДЗ, то листы решений разрабатываются только для тех задач и вариантов, где важно проверить правильность выбора метода, последовательности действий, навыков и умений при вычислениях. Кафедра определяет, для каких ИДЗ нужны листы решений. Листы решений (один вариант располагается на одном листе) используются при самоконтроле правильности выполнения заданий студентами, при взаимном студенческом контроле, а чаще всего при комбинированном контроле: преподаватель проверяет лишь правильность выбора метода, а студент по листу решений – свои вычисления. Это позволяет проверить ИДЗ 25 студентов за 15–20 минут с выставлением оценок в журнал.

2. В вузе студенческие группы по 15 человек, проводятся два АЗ в неделю, в расписание для каждой группы включены обязательные два часа в неделю самоподготовки под контролем преподавателя. При этих условиях организация индивидуальной, самостоятельной, творческой работы студентов, оперативного контроля за качеством этой работы значительно улучшается. Рекомендованные выше методы пригодны и в данном случае, однако появляются новые возможности. На АЗ быстрее проверяются и оцениваются ИДЗ, во время обязательной

самоподготовки можно проконтролировать проработку теории и решение ИДЗ, выставить оценки части студентов, принять задолженности по ИДЗ у отстающих.

Накопление большого количества оценок за ИДЗ, самостоятельные и контрольные работы в аудитории позволяет контролировать учебный процесс, управлять им, оценивать качество усвоения изучаемого материала.

Все это дает возможность отказаться от традиционного итогового семестрового (годового) экзамена по материалу семестра (учебного года) и ввести так называемую рейтинг-блок-модульную систему (РБМС) оценки знаний и навыков студентов, состоящую в следующем. Материал семестра (учебного года) разбивается на блоки (модули), по каждому из блоков (модулей) выполняются АЗ, ИДЗ и в конце каждого цикла – двухчасовая письменная коллоквиум-контрольная работа, в которую входят 2–3 теоретических вопроса и 5–6 задач. Учет оценок по АЗ, ИДЗ и коллоквиуму-контрольной позволяет вывести объективную общую оценку за каждый блок (модуль) и итоговую оценку по всем блокам (модулям) семестра (учебного года). Положение о РБМС см. в ч. 1 данного комплекса учебных пособий (прил. 5).

В заключение отметим, что усвоение содержащегося в пособии материала гарантирует хорошие знания студентов по соответствующим разделам курса высшей математики. Для отлично успевающих студентов необходима подготовка заданий повышенной сложности (индивидуальный подход в обучении!) с перспективными поощрительными мерами. Например, можно разработать для таких студентов специальные задания на весь семестр, включающие задачи настоящего пособия и дополнительные более сложные задачи и теоретические упражнения (для этой цели, в частности, предназначены дополнительные задачи в конце некоторых глав). Преподаватель может выдать эти задания в начале семестра, установить график их выполнения под своим контролем, разрешить свободное посещение лекционных или практических занятий по высшей математике и в случае успешной работы выставить отличную оценку до экзаменационной сессии.

16. ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

16.1. ОРИГИНАЛ И ИЗОБРАЖЕНИЕ ПО ЛАПЛАСУ

Начальной функцией или *оригиналом* называют функцию $f(t)$ действительной переменной t, удовлетворяющую следующим условиям:

1) $f(t) = 0$ при $t < 0$;

2) если $M > 0$ и s – некоторые вещественные числа, то

$$|f(t)| \le Me^{st} \text{ при } t \ge 0; \tag{16.1}$$

3) $f(t)$ – кусочно-непрерывная и интегрируемая на любом конечном отрезке изменения t.

Точная нижняя грань s_0 всех чисел s, для которых выполняется неравенство (16.1), называется *показателем роста функции* $f(t)$.

Если существует несобственный интеграл

$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt, \tag{16.2}$$

где $p = a + bi$, $\operatorname{Re} p = a > 0$, $\operatorname{Im} p = b$, то функцию $F(p)$ комплексной переменной p называют *изображением функции* $f(t)$ *по Лапласу*, или *ее лапласовым изображением*, или просто *изображением*.

Правило (16.2) получения по заданному оригиналу $f(t)$ изображения $F(p)$ называется *преобразованием Лапласа*.

Если $\operatorname{Re} p = a \ge s > s_0$ и выполняется условие (16.1), то можно доказать, что несобственный интеграл (16.2) абсолютно сходится и определяет аналитическую функцию в полуплоскости $a > s_0$ (рис. 16.1); при этом

$$\lim_{\operatorname{Re} p \to +\infty} F(p) = 0. \tag{16.3}$$

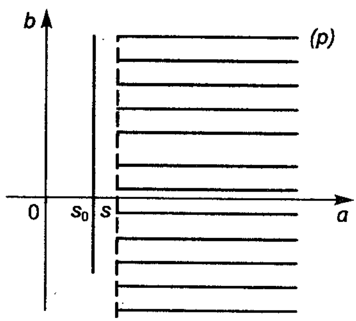


Рис. 16.1

Если $F(p)$ – лапласово изображение $f(t)$, то кратко это записывается в виде $F(p) \doteqdot f(t)$ или $F(p) = L\{f(t)\}$.

Можно доказать, что всякому изображению $F(p)$, удовлетворяющему условию (16.3), соответствует единственная начальная функция (оригинал). Принятые обозначения: $f(t) \doteqdot F(p)$ или $f(t) = L^{-1}\{F(p)\}$.

Пример 1. Найти изображение единичной *функции Хевисайда*

$$\sigma_0(t) = \begin{cases} 0 \text{ при } t < 0, \\ 1 \text{ при } t \geq 0. \end{cases}$$

График функции $\sigma_0(t)$ приведен на рис. 16.2.

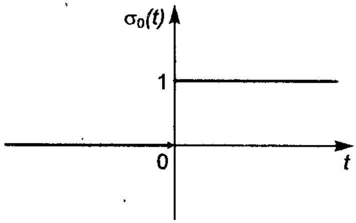


Рис. 16.2

▸ Очевидно, что $\sigma_0(t)$ удовлетворяет всем условиям оригинала и $s_0 = 0$. По формуле (16.2) имеем:

$$L\{\sigma_0(t)\} = \int\limits_0^{+\infty} e^{-pt}dt = -\frac{1}{p}e^{-pt}\Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{p},$$

так как $\lim\limits_{\operatorname{Re} p \to +\infty} e^{-pt} = 0$. Следовательно, $L\{\sigma_0(t)\} = \dfrac{1}{p}$, т.е. $\sigma_0(t) \doteqdot \dfrac{1}{p}$. ◂

Пример 2. Найти изображение $F(p)$ функции $e^{\alpha t}$, где $\alpha \in \mathbf{R}$.

▸ Имеем:

$$L\{e^{\alpha t}\} = \int\limits_0^{+\infty} e^{-pt}e^{\alpha t}dt = \int\limits_0^{+\infty} e^{-(p-\alpha)t}dt = -\frac{e^{-(p-\alpha)t}}{p-\alpha}\Bigg|_0^{+\infty} = \frac{1}{p-\alpha},$$

если $\operatorname{Re} p > \alpha = s_0$.

Следовательно, $e^{\alpha t} \doteqdot \dfrac{1}{p-\alpha}$. ◂

Замечание. Из определения оригинала следует, что не всякая функция $f(t)$ является оригиналом. Например, при невыполнении условия (16.1) нет гарантии сходимости интеграла (16.2). Если интеграл (16.2) расходится, то говорят, что функция $f(t)$ не является оригиналом. Нетрудно показать, например, что функции $f(t)=\frac{1}{t}$, $f(t)=e^{t^3}$, $f(t)=e^{1/t^2}$ не являются оригиналами, так как интеграл (16.2) для них расходится.

Перечислим *основные свойства оригиналов и изображений.*

1 (свойство линейности). Если $F_k(p) \risingdotseq f_k(t)$, $k=1, 2, ..., n$, то

$$\sum_{k=1}^{n} c_k f_k(t) \risingdotseq \sum_{k=1}^{n} c_k F_k(p), \tag{16.4}$$

где c_k – любые действительные или комплексные числа.

2 (теорема смещения). Если $f(t) \risingdotseq F(p)$, то для любого комплексного числа α имеем:

$$e^{\alpha t} f(t) \risingdotseq F(p-\alpha), \operatorname{Re} p > s_0 + \operatorname{Re}\alpha. \tag{16.5}$$

3 (теорема подобия). Если $f(t) \risingdotseq F(p)$ и $\lambda>0$, то

$$f(\lambda t) \risingdotseq \frac{1}{\lambda} F\left(\frac{p}{\lambda}\right). \tag{16.6}$$

4 (теорема о дифференцировании изображения). Если $f(t) \risingdotseq F(p)$, то

$$(-1)^n \frac{d^n F(p)}{dp^n} \risingdotseq t^n f(t). \tag{16.7}$$

5 (теорема о дифференцировании оригинала). Если $f(t) \risingdotseq$ $\risingdotseq F(p)$, то

$$\left.\begin{aligned} f'(t) &\risingdotseq pF(p) - f(0), \\ f''(t) &\risingdotseq p^2 F(p) - pf(0) - f'(0), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f^{(n)}(t) &\risingdotseq p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0). \end{aligned}\right\} \tag{16.8}$$

Если $f(0) = f'(0) = \ldots = f^{(n-1)}(0) = 0$, то $f^{(n)}(t) \risingdotseq p^n F(p)$.

6 (теорема запаздывания). Если $f(t) \risingdotseq F(p)$, то для $t_0 > 0$

$$f(t - t_0) \risingdotseq e^{-pt_0} F(p). \tag{16.9}$$

Сверткой двух функций $f_1(t)$ *и* $f_2(t)$, обозначаемой $f_1(t) * f_2(t)$, называется функция, определяемая равенством

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau)\, d\tau.$$

Если $f_1(t)$, $f_2(t)$ – оригиналы, т.е. $f_1(\tau) \equiv 0$ при $\tau > t$, то их свертка представима в следующем виде:

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau)\, d\tau = \int_0^t f_1(t-\tau) f_2(\tau)\, d\tau. \tag{16.10}$$

Свертка двух оригиналов является оригиналом. Для нее справедливы следующие свойства:

1) $f_1 * f_2 = f_2 * f_1$ (коммутативность);

2) $(f_1 * f_2) * f_3 = f_1 * (f_2 * f_3)$ (ассоциативность);

3) $(c_1 f_1 + c_2 f_2) * f_3 = c_1 (f_1 * f_3) + c_2 (f_2 * f_3)$ (линейность).

7 (теорема Бореля, или теорема свертывания). Если $f_1(t) \doteqdot F_1(p)$, $f_2(t) \doteqdot F_2(p)$, то

$$f_1(t) * f_2(t) \doteqdot F_1(p)\, F_2(p). \tag{16.11}$$

Формула (16.11) называется *формулой умножения изображений*. Она часто применяется для восстановления оригинала по его изображению.

8 (теорема об интегрировании оригинала). Если $f(t) \doteqdot F(p)$, то

$$\int_0^t f(\tau)\,d\tau \doteqdot \frac{F(p)}{p}. \tag{16.12}$$

9 (теорема об интегрировании изображения). Если $f(t) \doteqdot F(p)$ и интеграл $\int_p^{+\infty} F(z)\,dz$ сходится, то

$$\frac{f(t)}{t} \doteqdot \int_p^{+\infty} F(z)\,dz. \tag{16.13}$$

10 (теорема об изображении периодической функции). Пусть $f(t)$ – периодическая функция периода T и $f(t) \doteqdot F(p)$. Если $F_0(p)$ – изображение функции $f(t)(\sigma_0(t) - \sigma_0(t-T))$, т.е. $F_0(p) = \int_0^T f(t) e^{-pt}\,dt$, то

$$F(p) = \frac{F_0(p)}{1 - e^{-pT}}, \quad \mathrm{Re}\, p > 0. \tag{16.14}$$

С целью проверки правильности вычислений в операционном исчислении часто используют *предельные соотношения*.

11 (теорема о предельных соотношениях). Если $f(t), f'(t)$ – оригиналы и $f(t) \doteqdot F(p)$, то

$$\lim_{p \to 0} pF(p) = \lim_{t \to \infty} f(t), \tag{16.15}$$

$$\lim_{\mathrm{Re}\, p \to +\infty} pF(p) = \lim_{t \to 0+} f(t) = f(0). \tag{16.16}$$

Соотношения (16.15) и (16.16) называются *предельными соотношениями связи между изображением и оригиналом.*

12. При решении ряда практических задач используется *формула Дюамеля*

$$pF_1(p)F_2(p) \doteqdot f_1(t)f_2(0) + \int_0^t f_1(\tau)f_2'(t-\tau)\,d\tau, \tag{16.17}$$

где $f_1(t)$ – непрерывная функция; $f_2(t)$ имеет непрерывную производную; $F_1(p) \doteqdot f_1(t)$; $F_2(p) \doteqdot f_2(t)$.

Пример 3. Найти изображения оригиналов $f(t) = \sin t$ и $f(t) = \cos t$.

▶ Известно, что $\sin t = \dfrac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$ и $\cos t = \dfrac{e^{it} + e^{-it}}{2}$. Тогда из свойства 1 следует, что

$$\sin t \doteqdot \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{p-i} - \frac{1}{p+i}\right) = \frac{1}{2i}\frac{2i}{p^2+1} = \frac{1}{p^2+1},$$

$$\cos t \doteqdot \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-i} - \frac{1}{p+i}\right) = \frac{1}{2}\frac{2p}{p^2+1} = \frac{1}{p^2+1}.$$

Итак, $\sin t \doteqdot \dfrac{1}{p^2+1}$, $\cos t \doteqdot \dfrac{p}{p^2+1}$. ◀

Пример 4. Записать изображения указанных функций-оригиналов: $\sin \beta t$; $\cos \beta t$; $\operatorname{sh} \beta t$; $\operatorname{ch} \beta t$.

▶ Так как известны изображения для $\sin t$ и $\cos t$, то изображения $\sin \beta t$ и $\cos \beta t$ могут быть найдены с помощью теоремы подобия (см. формулу (16.6)):

$$\sin \beta t \doteqdot \frac{1}{\beta}\frac{1}{\beta(p/\beta)^2+1} = \frac{1}{\beta}\frac{\beta^2}{p^2+\beta^2} = \frac{\beta}{p^2+\beta^2},$$

$$\cos \beta t \doteqdot \frac{1}{\beta}\frac{p/\beta}{\beta(p/\beta)^2+1} = \frac{1}{\beta^2}\frac{\beta^2 p}{p^2+\beta^2} = \frac{p}{p^2+\beta^2}.$$

Далее:

$$\operatorname{sh} \beta t = \frac{e^{\beta t} - e^{-\beta t}}{2}, \quad \operatorname{ch} \beta t = \frac{e^{\beta t} + e^{-\beta t}}{2}.$$

Тогда из примера 2 и свойства линейности следует, что

$$\operatorname{sh} \beta t \doteqdot \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-\beta} - \frac{1}{p+\beta}\right) = \frac{\beta}{p^2-\beta^2},$$

$$\operatorname{ch} \beta t \doteqdot \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-\beta} + \frac{1}{p+\beta}\right) = \frac{p}{p^2-\beta^2}. ◀$$

Пример 5. Найти изображения оригиналов $e^{\alpha t}\sin \beta t$ и $e^{\alpha t}\cos \beta t$.

▶ Так как $\sin\beta t \risingdotseq \dfrac{\beta}{p^2+\beta^2}$, $\cos\beta t \risingdotseq \dfrac{p}{p^2+\beta^2}$, то из теоремы смещения следует, что

$$e^{\alpha t}\sin\beta t \risingdotseq \frac{\beta}{(p+\alpha)^2+\beta^2},\quad e^{\alpha t}\cos\beta t \risingdotseq \frac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2+\beta^2}.$$ ◀

Пример 6. Найти изображения указанных оригиналов: t; t^n; $t^n e^{\alpha t}$; $t\sin\beta t$; $t\cos\beta t$.

▶ Известно, что $\sigma_0(t) \risingdotseq \dfrac{1}{p}$. Тогда по правилу дифференцирования изображения находим:

$$t \risingdotseq -\frac{d}{dp}\left(\frac{1}{p}\right) = \frac{1}{p^2},\ t^2 \risingdotseq (-1)^2\frac{d^2}{dp^2}\left(\frac{1}{p}\right) = \frac{2!}{p^3},$$

$$t^3 \risingdotseq -\frac{d}{dp}\left(\frac{2!}{p^3}\right) = \frac{3!}{p^4},\ \ldots,\ t^n \risingdotseq -\frac{d}{dp}\left(\frac{(n-1)!}{p^n}\right) = \frac{n!}{p^{n+1}}.$$

Из теоремы смещения следует, что $t^n e^{\alpha t} \risingdotseq \dfrac{n!}{(p-\alpha)^{n+1}}$.

Зная изображения $\sin\beta t$ и $\cos\beta t$, из теоремы о дифференцировании изображения получаем:

$$t\sin\beta t \risingdotseq -\frac{d}{dp}\left(\frac{\beta}{p^2+\beta^2}\right) = \frac{2\beta p}{(p^2+\beta^2)^2},$$

$$t\cos\beta t \risingdotseq -\frac{d}{dp}\left(\frac{\beta}{p^2+\beta^2}\right) = -\frac{p^2+\beta^2-2p^2}{(p^2+\beta^2)^2} = \frac{p^2-\beta^2}{(p^2+\beta^2)^2}.$$ ◀

Пример 7. Найти изображения оригиналов:

а) $e^{-5t}\sin\pi t$; б) $\mathrm{ch}\,2t\cos 3t$; в) $\sin 5t\cos 2t$.

▶ а) Так как $\sin\pi t \risingdotseq \dfrac{\pi}{p^2+\pi^2}$, то по свойству смещения

$$e^{-5t}\sin\pi t \risingdotseq \frac{\pi}{(p+5)^2+\pi^2}.$$

б) Так как $\mathrm{ch}\,2t\cos 3t = \dfrac{1}{2}(e^{2t}+e^{-2t})\cos 3t$, то из свойства линейности и теоремы смещения следует, что

$$\mathrm{ch}\,2t\cos 3t \risingdotseq \frac{1}{2}\left(\frac{p-2}{(p-2)^2+9}+\frac{p+2}{(p+2)^2+9}\right).$$

в) Так как $\sin 5t\cos 2t = \dfrac{1}{2}(\sin 7t+\sin 3t)$, то из свойства линейности следует, что

$$\sin 5t\cos 2t \risingdotseq \frac{1}{2}\left(\frac{7}{p^2+49}+\frac{3}{p^2+9}\right). \blacktriangleleft$$

Пример 8. Найти изображения оригиналов:

а) $\int\limits_0^t (e^{-5z}\text{ch}\, 2z + e^{3z}\sin 4z)dz$; б) $\int\limits_0^t (z^5-4z^4+3z^2-2z)e^{2z}dz$.

$\blacktriangleright$ а) Найдем изображение оригинала $f(t)=e^{-5t}\text{ch}\, 2t+e^{3t}\sin 4t$. Из свойства линейности и теорем подобия и смещения получаем:

$$e^{-5t}\text{ch}\, 2t+e^{3t}\sin 4t \risingdotseq \frac{p+5}{(p+5)^2-4}+\frac{4}{(p-3)^2+16}.$$

Тогда, согласно правилу интегрирования оригинала, имеем:

$$\int\limits_0^t (e^{-5z}\text{ch}\, 2z+e^{3z}\sin 4z)dz \risingdotseq \frac{1}{p}\left(\frac{p+5}{(p+5)^2-4}+\frac{4}{(p-3)^2+16}\right).$$

б) Найдем изображение оригинала:

$$t^5-4t^4+3t^2-2t \risingdotseq \frac{5!}{p^6}-\frac{4\cdot 4!}{p^5}+\frac{6}{p^3}-\frac{2}{p^2}.$$

Тогда по теореме смещения

$$(t^5-4t^4+3t^2-2t)e^{2t} \risingdotseq \frac{5!}{(p-2)^6}-\frac{4\cdot 4!}{(p-2)^5}+\frac{6}{(p-2)^3}-\frac{2}{(p-2)^2}.$$

Использовав теорему об интегрировании оригинала, получим:

$$\int\limits_0^t (z^5-4z^4+3z^2-2z)e^{2z}dz \risingdotseq \frac{1}{p}\left(\frac{120}{(p-2)^6}-\frac{96}{(p-2)^5}+\frac{6}{(p-2)^3}-\frac{2}{(p-2)^2}\right). \blacktriangleleft$$

Пример 9. Найти оригиналы следующих изображений:

а) $\dfrac{1}{p(p^2+9)}$; б) $\dfrac{1}{p^2(p^2+9)}$; в) $\dfrac{1}{(p+2)^3}$.

$\blacktriangleright$ а) Так как $\dfrac{1}{p^2+9}=\dfrac{1}{3}\dfrac{3}{p^2+9}\risingdotseq\dfrac{1}{3}\sin 3t$, то по теореме об интегрировании оригинала

$$\frac{1}{p(p^2+9)} \risingdotseq \int\limits_0^t \frac{1}{3}\sin 3z dz = -\frac{1}{9}\cos 3z\Big|_0^t = \frac{1}{9}(1-\cos 3t).$$

б) На основании формулы (16.12) с учетом результатов, полученных в п. «а», имеем:

$$\frac{1}{p^2}\frac{1}{p^2+9} \risingdotseq \int\limits_0^t \frac{1}{9}(1-\cos 3z)dz = \frac{1}{9}\left(z-\frac{1}{3}\sin 3z\right)\Big|_0^t = \frac{1}{9}\left(t-\frac{1}{3}\sin 3t\right).$$

в) Так как $t^2 \risingdotseq \frac{2!}{p^3}$, то $\frac{1}{p^3} \risingdotseq \frac{t^2}{2!}$. На основании теоремы смещения получаем:

$$\frac{1}{(p+2)^3} \risingdotseq e^{-2t}\frac{t^2}{2!}. ◂$$

Пример 10. Найти изображение функции $f(t) = \frac{1-\cos 2t}{t}e^{-5t}$.

▸ Так как функция $f(t)$ непрерывна при всех $t>0$ и

$$\lim_{t\to+0} f(t) = \lim_{t\to+0}\frac{1-\cos 2t}{t}e^{-5t} = \lim_{t\to+0} 2\frac{\sin t}{t}\cdot\sin t\cdot e^{-5t} = 0,$$

то она является оригиналом. Очевидно, что $1-\cos 2t \risingdotseq \frac{1}{p}-\frac{p}{p^2+4}$. Из правила интегрирования изображения следует, что

$$\frac{1-\cos 2t}{t} \risingdotseq \int\limits_p^{+\infty}\left(\frac{1}{z}-\frac{z}{z^2+4}\right)dz = \lim_{\beta\to\infty}\int\limits_p^{\beta}\left(\frac{1}{z}-\frac{z}{z^2+4}\right)dz =$$

$$= \lim_{\beta\to\infty}\left(\ln z-\frac{1}{2}\ln(z^2+4)\right)\Big|_p^{\beta} = \lim_{\beta\to\infty}\ln\frac{z}{\sqrt{z^2+4}}\Big|_p^{\beta} =$$

$$= \lim_{\beta\to\infty}\left(\ln\frac{\beta}{\sqrt{\beta^2+4}}-\ln\frac{p}{\sqrt{p^2+4}}\right) = \ln 1+\ln\frac{\sqrt{p^2+4}}{p}.$$

Применив теорему смещения, получим:

$$\frac{1-\cos 2t}{t}e^{-5t} \risingdotseq \ln\frac{\sqrt{(p+5)^2+4}}{p+5} = \ln\frac{\sqrt{p^2+10p+29}}{p+5}. ◂$$

Пример 11. Найти изображение оригинала $\cos(2t-\pi)$, $t\ge\pi/2$.

▸ Известно, что $\cos 2t \risingdotseq \frac{p}{p^2+4}$ (см. пример 4). Тогда из теоремы запаздывания получаем:

$$\cos(2t-\pi) = \cos 2\left(t-\frac{\pi}{2}\right) = e^{-\pi p/2}\frac{p}{p^2+4}. ◂$$

Пример 12. Найти свертку оригиналов $\cos 3t$ и $\sin t$ и изображение свертки.

▸ Согласно определению свертки имеем:

$$\cos 3t * \sin t = \int_0^t \cos 3\tau \sin(t-\tau)\,d\tau = \frac{1}{2}\int_0^t (\sin(t+2\tau) + \sin(t-4\tau))\,d\tau =$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\cos(t+2\tau)\Big|_0^t + \frac{1}{4}\cos(t-4\tau)\Big|_0^t\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\cos 3t + \frac{1}{2}\cos t + \frac{1}{4}\cos 3t - \frac{1}{4}\cos t\right) = -\frac{1}{8}\cos 3t + \frac{1}{8}\cos t.$$

Следовательно, $\cos 3t * \sin t = -\frac{1}{8}\cos 3t + \frac{1}{8}\cos t$. Изображение полученного оригинала находим с учетом свойства линейности и теоремы подобия:

$$\cos 3t * \sin t \risingdotseq -\frac{1}{8}\frac{p}{p^2+9} + \frac{1}{8}\frac{p}{p^2+1} =$$

$$= \frac{1}{8}\frac{-p^3 - p + p^3 + 9p}{(p^2+9)(p^2+1)} = \frac{p}{(p^2+9)(p^2+1)}.$$

Тот же результат можно получить другим путем. Известно, что $\cos 3t \risingdotseq \frac{p}{p^2+9}$, $\sin t \risingdotseq \frac{1}{p^2+1}$ (см. пример 4). На основании теоремы Бореля имеем:

$$\cos 3t * \sin t \risingdotseq \frac{p}{(p^2+9)(p^2+1)}. \blacktriangleleft$$

Пример 13. Найти оригинал $f(t)$, соответствующий изображению $F(p) = \frac{p}{(p^2+4)^2}$.

▸ Представим изображение в виде $F(p) = \frac{p}{p^2+4}\frac{1}{p^2+4}$. Так как $\frac{1}{p^2+4} \risingdotseq \frac{1}{2}\sin 2t$, $\frac{p}{p^2+4} \risingdotseq \cos 2t$, то на основании формулы (16.11)

$$\frac{p}{p^2+4}\frac{1}{p^2+4} \risingdotseq \cos 2t * \frac{1}{2}\sin 2t =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^t \cos 2\tau \sin(2t-2\tau)\,d\tau = \frac{1}{4}\int_0^t (\sin 2t + \sin(2t-4\tau))\,d\tau =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\tau \sin 2t\Big|_0^t + \frac{1}{4}\cos(2t-4\tau)\Big|_0^t\right) = \frac{1}{4}t\sin 2t + \frac{1}{4}\cos 2t - \frac{1}{4}\cos 2t =$$

$$= \frac{1}{4}t\sin 2t = f(t). \blacktriangleleft$$

Пример 14. Найти изображение оригинала $f(t) = \begin{cases} t, & 0 \le t < 1, \\ 2-t, & 1 \le t < 2, \end{cases}$ периодически продолженного на интервал $[0, +\infty)$ с периодом $T = 2$ (рис. 16.3).

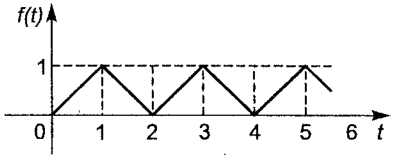


Рис. 16.3

▸ Так как оригинал периодический, то, согласно формуле (16.14),

$$F(p) = \frac{1}{1-e^{-pT}} F_0(p),$$

где $T = 2$, а $F_0(p) = \int\limits_0^2 f(t)e^{-pt}dt = \int\limits_0^1 te^{-pt}dt + \int\limits_1^2 (2-t)e^{-pt}dt$.

Интегрируя по частям, находим интегралы:

$$\int\limits_0^1 te^{-pt}dt = -\frac{1}{p}te^{-pt}dt \Big|_0^1 + \frac{1}{p}\int\limits_0^1 e^{-pt}dt =$$

$$= -\frac{1}{p}e^{-p} - \frac{1}{p^2}e^{-pt}\Big|_0^1 = -\frac{1}{p}e^{-p} + \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^2}e^{-p},$$

$$\int\limits_1^2 (2-t)e^{-pt}dt = -(2-t)\frac{1}{p}e^{-pt}\Big|_1^2 - \int\limits_1^2 \frac{1}{p}e^{-pt}dt =$$

$$= \frac{1}{p}e^{-p} + \frac{1}{p^2}e^{-pt}\Big|_1^2 = \frac{1}{p}e^{-p} + \frac{1}{p^2}e^{-2p} - \frac{1}{p^2}e^{-p}.$$

Следовательно,

$$F_0(p) = -\frac{1}{p}e^{-p} + \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^2}e^{-p} + \frac{1}{p}e^{-p} + \frac{1}{p^2}e^{-2p} - \frac{1}{p^2}e^{-p} =$$

$$= \frac{1}{p^2} - \frac{2}{p^2}e^{-p} + \frac{1}{p^2}e^{-2p}.$$

Изображением для $f(t)$ будет функция

$$F(p) = \frac{1-2e^{-p}+e^{-2p}}{p^2(1-e^{-2p})} = \frac{(1-e^{-p})^2}{p^2(1-e^{-2p})} = \frac{1}{p^2}\frac{1-e^{-p}}{1+e^{-p}}. ◂$$

Пример 15. Найти изображение периодической системы импульсов, изображенных на рис.16.4.

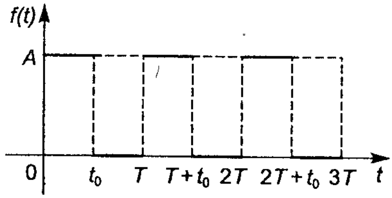


Рис. 16.4

▶ Заданную графически периодическую функцию $f(t)$ с периодом T можно с помощью единичной функции Хевисайда $\sigma_0(t)$ представить аналитически:

$$f(t) = \begin{cases} A\sigma_0(t) & \text{при} \quad 0 \le t < t_0, \\ 0 & \text{при} \quad t_0 \le t < T. \end{cases}$$

Поэтому

$$F_0(p) = \int_0^T f(t)e^{-pt}dt = \int_0^{t_0} Ae^{-pt}dt = -\frac{A}{p}e^{-pt}\Big|_0^{t_0} = \frac{A}{p} - \frac{Ae^{-pt_0}}{p}.$$

Тогда из формулы (16.14) следует, что

$$f(t) \doteqdot \frac{A}{p(1-e^{-pT})}(1-e^{-pt_0}) = \frac{A(1-e^{-pt_0})}{p(1-e^{-pT})}. \blacktriangleleft$$

Пример 16. Найти оригинал $f(t)$ по его изображению $F(p) = \dfrac{5p^2}{(p^2+4)^2}$.

▶ Представим $F(p)$ в виде произведения $5p\dfrac{p}{p^2+4}\dfrac{1}{p^2+4}$. Так как $\dfrac{p}{p^2+4} \doteqdot \cos 2t$, $\dfrac{1}{p^2+4} \doteqdot \dfrac{1}{2}\sin 2t$, то по формуле Дюамеля (16.17) получим:

$$5p\frac{p}{p^2+4}\frac{1}{p^2+4} \doteqdot 5\frac{d}{dt}\left(\cos 2t * \frac{1}{2}\sin 2t\right) = 5\frac{d}{dt}\left(\int_0^t \cos 2\tau \cdot \frac{1}{2}\sin 2(t-\tau)d\tau\right) =$$

$$= 5\int_0^t \cos 2\tau \cdot \cos 2(t-\tau)d\tau = \frac{5}{2}\int_0^t (\cos 2t - \cos(2t-4\tau))d\tau =$$

$$= \frac{5}{2}\left(\tau \cos 2t + \frac{1}{4}\sin(2t-4\tau)\right)\Big|_0^t = \frac{5}{2}\left(t \cos 2t - \frac{1}{4}\sin 2t - \frac{1}{4}\sin 2t\right) =$$

$$= \frac{5}{2}\left(t \cos 2t - \frac{1}{2}\sin 2t\right) = f(t)\,. ◀$$

Пример 17. Записать изображение дифференциального выражения $2f''(t) - 3f'(t) + f(t)$, если $F(p) \risingdotseq f(t)$ и $f(0) = 1$, $f'(0) = -1$.

▶ По формулам (16.8) имеем:

$$f'(t) \risingdotseq pF(p) - 1\,,\ f''(t) \risingdotseq p^2F(p) - p + 1\,.$$

Тогда из свойства линейности следует, что

$$2f''(t) - 3f'(t) + f(t) \risingdotseq 2p^2F(p) - 2p + 2 - 3pF(p) + 3 + F(p) =$$

$$= (2p^2 - 3p + 1)F(p) - 2p + 5\,. ◀$$

Основные свойства изображений Лапласа перечислены в прил. 1. Наиболее часто встречающиеся при решении задач оригиналы и их изображения приведены в прил. 2.

В математике и различных ее приложениях, например в механике, электротехнике, теории автоматического регулирования, широко используются так называемые *импульсные функции* и их изображения. Рассмотрим функцию

$$\sigma_1(t,h) = \frac{1}{h}(\sigma_0(t) - \sigma_0(t-h)) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad t<0, \\ 1/h & \text{при} \quad 0 \le t < h, \\ 0 & \text{при} \quad h \le t < +\infty, \end{cases}$$

график которой приведен на рис. 16.5.

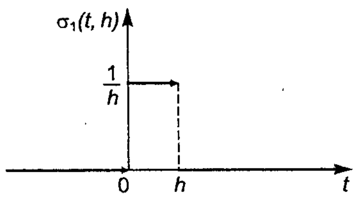


Рис. 16.5

Если данную функцию интерпретировать как силу, действующую в промежуток времени от 0 до h, а в остальное время равную нулю, то очевидно, что импульс этой силы равен $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sigma_1(t,h)\,dt = 1$.

Так как изображение функции Хевисайда $\sigma_0(t)$ известно, то, пользуясь свойством линейности изображения, получаем:

$$\sigma_1(t, h) \risingdotseq \frac{1}{p}\,\frac{1-e^{-ph}}{h}.$$

В механике часто рассматривают силы, действующие в очень короткий промежуток времени, или, как говорят, «мгновенно», и имеющие конечный импульс. Поэтому была введена функция $\delta(t) = \lim\limits_{h \to 0} \sigma_1(t, h)$, которая называется *единичной импульсной функцией* или *дельта-функцией Дирака*.

Изложенное выше позволяет считать, что по определению $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1$.

Последнее равенство можно записать также в виде $\int\limits_{0}^{0} \delta(t)dt = 1$. Тогда

$$\delta(t) \risingdotseq \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\,\frac{1-e^{-ph}}{p} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{p}\,\frac{pe^{-ph}}{1} = 1.$$

Здесь при нахождении предела было применено правило Лопиталя.

Рассмотрим $\delta(t)$ как силу, действующую на материальную точку единичной массы. Для этого найдем решение дифференциального уравнения $s''(t) = \delta(t)$, удовлетворяющее начальным условиям $s(0) = 0$, $s'(0) = 0$. Его операторное уравнение $p^2\bar{s}(t) = 1$, откуда $\bar{s}(t) = \frac{1}{p^2}$, $s(t) = t$, $v(t) = 1$.

Таким образом, функцию $\delta(t)$ можно трактовать как силу, сообщающую материальной точке единичной массы в момент времени $t = 0$ скорость, равную единице.

Функцию $\delta(t - t_0) \risingdotseq e^{-pt_0}$ можно считать импульсной силой, действующей в момент времени t_0.

Рассмотрим уравнение $s''(t) = f(t) + \delta(t)$ с начальными условиями $s(0) = s'(0) = 0$. Его операторное уравнение

$$p^2\bar{s}(p) = F(p) + 1, \quad \bar{s}(p) = \frac{F(p)}{p^2} + \frac{1}{p^2},$$

откуда $s(t) = \int\limits_0^t f(\tau)(t-\tau)d\tau + t$. Очевидно, что к такому же результату придем, решив уравнение $s''(t) = f(t)$ при других начальных условиях: $s(0) = 0$, $s'(0) = 1$.

Из определения $\delta(t)$ следует, что

$$\int\limits_{-\infty}^{t} \delta(\tau)d\tau = \begin{cases} 0 & \text{при } -\infty < t < 0, \\ 1 & \text{при } 0 \le t < +\infty, \end{cases}$$

т.е. $\sigma_0(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} \delta(\tau)d\tau$ – единичная функция Хевисайда. Дифференцируя обе части последнего равенства, получаем: $\delta(t) = \sigma'_0(t)$.

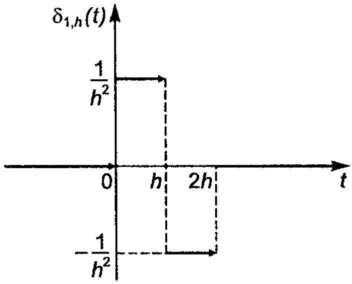


Рис. 16.6

Введем функцию

$$\delta_{1,h}(t) = (\delta_h(t-h))' = \begin{cases} \dfrac{1}{h^2} & \text{при } 0 \le t < h, \\ -\dfrac{1}{h^2} & \text{при } h \le t < 2h, \\ 0 & \text{при } -\infty < t < 0,\ 2h \le t < +\infty, \end{cases}$$

изображенную на рис. 16.6. Для нее определим *импульсную функцию второго порядка* $\delta_1(t)$ по формуле $\delta_1(t) = \lim\limits_{h\to 0}\delta_{1,h}(t)$. Функция $\delta_1(t)$ удовлетворяет следующим условиям:

1) $\delta_1(t) = 0$ при $t \ne 0$;

2) $\delta_1(-0) = -\infty$, $\delta_1(+0) = +\infty$;

3) $\int\limits_{-\infty}^{t} \delta_1(\tau)d\tau = \delta(t)$, $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta_1(t)dt = 0$, $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dt \int\limits_{-\infty}^{t} \delta_1(\tau)d\tau = 1$.

Изображение $\delta_1(t)$ находим как предел при $h \to 0$ изображения функции $\delta_{1,h}(t)$, которое определяется формулой

$$\delta_{1,h}(t) \doteqdot \frac{1}{h^2}\left(\frac{1}{p} - \frac{2e^{-ph}}{p} + \frac{e^{-2ph}}{p}\right) = \frac{1}{h^2 p}(1 - e^{-ph})^2,$$

т.е. $L\{\delta_1(t)\} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h^2 p}(1-e^{-ph})^2 = p$, $\delta_1(t) \risingdotseq p$.

Найдем, например, решение дифференциального уравнения $s''(t) = \delta_1(t)$ при нулевых начальных условиях. Имеем соответствующее операторное уравнение $p^2\bar{s}(p) = p$. Далее, $\bar{s}(p) = \frac{1}{p}$, $s(t) = 1(t>0)$. Это означает, что импульсная сила второго порядка $\delta_1(t)$ сообщает материальной точке единичной массы мгновенное перемещение на единицу длины без дальнейшего движения.

АЗ-16.1

Найти изображение оригинала.

1. $3e^{5t} - 2\sin 3t + 4$. **2.** $e^{-2t}(\sin t + \cos 3t)$.

3. $\frac{1}{2}t^3 - 7t^2 + 3t + 1$. **4.** $\frac{1}{20}t^5 + \frac{1}{4}t^4 - t$.

5. $\sin 4t\cos 2t$. **6.** $\sin^2 3t$.

7. $e^{-3t}\cos^2 2t$. **8.** $\operatorname{ch}2t\sin3t$.

9. $\operatorname{sh} t\cos 4t$. **10.** $e^{-2t}\cos 3t\cos 6t$. **11.** t^2e^{-2t}.

12. $e^{t-2}\sin(t-2)\sigma_0(t-2)$, $t \geq 2$. (*Ответ:* $\dfrac{e^{-2t}}{(p-1)^2+1}$.)

13. $\sin(t-2)\sigma_0(t)$. (*Ответ:* $(\cos 2 - p\sin 2)/(p^2+1)$.)

АЗ-16.2

Использовав теорему об интегрировании изображений, найти изображение указанной функции.

1. $\sin t/t$. (*Ответ:* $\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} p$.)

2. $\dfrac{\sin 7t\sin 3t}{t}$. (*Ответ:* $\frac{1}{4}\ln\dfrac{p^2+100}{p^2+16}$.)

3. $\sin^2 t/t$. (*Ответ:* $\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{p^2+4}}{p}$.)

4. $\frac{e^{\alpha t}-e^{\beta t}}{t}$. (*Ответ:* $\ln\frac{p-\beta}{p-\alpha}$.)

5. $\frac{e^t-1}{t}$. (*Ответ:* $\ln\frac{p}{p-1}$.)

6. $\frac{\cos t-1}{t}$. (*Ответ:* $\ln\frac{p}{\sqrt{p^2+1}}$.)

7. $e^{at}\frac{\sin t}{t}$. (*Ответ:* $\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}(p+a)$.)

8. $\frac{\sin^2 t}{t^2}$. (*Ответ:* $\operatorname{arctg}\frac{2}{p}-\frac{p}{2}\ln\frac{\sqrt{p^2+4}}{p}$.)

9. $e^{-t}\frac{1-\cos t}{t}$. (*Ответ:* $\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{(p+1)^2}\right)$.)

10. $\frac{\operatorname{sh} t}{t}$. (*Ответ:* $\frac{1}{2}\ln\frac{p+1}{p-1}$.)

АЗ-16.3

Найти свертку оригиналов и соответствующее ей изображение.

1. t, $\sin t$. (*Ответ:* $t-\sin t$, $\frac{1}{p(p^2-1)}$.)

2. e^t, e^{-t}. (*Ответ:* $\operatorname{sh} t$, $\frac{1}{p^2+1}$.)

3. t, $\cos t$. (*Ответ:* $1-\cos t$, $\frac{1}{p(p^2+1)}$.)

4. t, e^t. (*Ответ:* e^t-t-1, $\frac{1}{p^2(p-1)}$.)

5. $1-5t$, e^{5t}. (*Ответ:* t, $\frac{1}{p^2}$.)

6. Найти изображение $F(p)$ оригинала $f(t)$, являющегося периодической функцией с периодом $T = 2\pi$, если

$$f(t) = \begin{cases} 1 - \dfrac{2t}{\pi} & \text{при } 0 \le t < \pi, \\ \dfrac{2t}{\pi} - 3 & \text{при } \pi \le t < 2\pi. \end{cases} \qquad \left(\textit{Ответ: } F(p) = \frac{1}{p} - \frac{2\,th(\pi p)}{\pi p^2}.\right)$$

7. Найти изображение дифференциального выражения $y''' + 5y'' - 3y' + 2y - 3$, если $y(0) = -3$, $y'(0) = 7$, $y''(0) = -1$, где $y(t)$, $y'(t)$, $y''(t)$, $y'''(t)$ – оригиналы. (*Ответ:* $p^3 y(p) + 5p^2 y(p) - 3py(p) + 2y(p) - \dfrac{3}{p} + 3p^2 + 8p - 43$.)

8. Найти изображение оригинала с периодом $T = 4$, заданного на рис. 16.7. (*Ответ:* $\dfrac{1 - e^{-2p} - 2pt^{-4p}}{p^2(1 - e^{-4p})}$.)

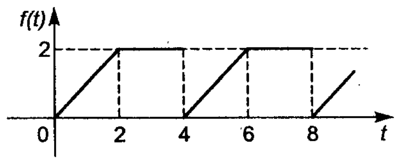


Рис. 16.7

Самостоятельная работа

1. 1) Найти изображение оригинала $f(t) = t^4 - e^{-t}\cos 3t + 5\sin t$.

2) Найти свертку оригиналов $\cos 2t$ и $\sin t$ и ее изображение. (*Ответ*: $\dfrac{1}{3}(\cos t - \cos 2t)$, $\dfrac{p}{(p^2+4)(p^2+1)}$.)

2. 1) Найти изображение оригинала $f(t) = 3 - e^{5t}\sin 7t + 3e^{-5r}$.

2) Найти свертку оригиналов $\sin 2t$, $\cos t$ и ее изображение. (*Ответ*: $\frac{2}{3}(\cos t - \cos 2t)$, $\frac{2p}{(p^2+4)(p^2+1)}$.)

3. 1) Найти изображение оригинала $f(t) = \cos^2 6t - e^{2t}\sin 3t - t^4$.

2) Найти свертку оригиналов $\cos t$, $\cos t$ и ее изображение. (*Ответ*: $\frac{1}{2}(\sin t + t\cos t)$, $\frac{p^2}{(p^2+1)^2}$.)

16.2. НАХОЖДЕНИЕ ОРИГИНАЛОВ ПО ИЗОБРАЖЕНИЯМ

В предыдущем параграфе описана методика получения изображений многих элементарных функций, т.е. установлено соответствие оригиналов и их изображений, а также на простейших примерах показано, как по изображению найти оригинал. Следующей важной задачей операционного исчисления является нахождение функций-оригиналов по их изображениям. В общем случае эта задача является достаточно сложной.

Как известно, для того чтобы функция $F(p)$ была изображением $f(t)$, достаточно выполнения следующих условий:

1) $F(p)$ – аналитическая функция в полуплоскости $\operatorname{Re} p = a > s_0$;

2) $\lim\limits_{|p| \to \infty} F(p) = 0$, если $\operatorname{Re} p > s_0$;

3) интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |F(a+bi)|\,db$ сходится.

При выполнении указанных условий справедливы формулы:

$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt, \tag{16.18}$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\lim_{b\to\infty}\int_{a-bi}^{a+bi} F(p)e^{pt}dp, \tag{16.19}$$

где $p = a + bi$, $i = \sqrt{-1}$.

Формулы (16.18) и (16.19) называются соответственно *прямым* и *обратным преобразованиями Лапласа*. Для практических целей формула (16.19) малопригодна, так как требует знания методов нахождения интегралов от известных аналитических функций комплексной переменной $p = a + bi$, где $-\infty < b < +\infty$. Поэтому чаще используют *вторую теорему о разложении*, которая приведена ниже.

***Теорема**. Если $F(p) = \dfrac{P_m(p)}{Q_n(p)}$, где $P_m(p)$ и $Q_n(p)$ являются многочленами комплексной переменной p степеней m и n $(m < n)$; $p_1, p_2, \ldots, p_k$ – корни многочлена $Q_n(p)$ кратностей $l_1, l_2, \ldots, l_k$ соответственно $(l_1 + l_2 + \ldots\ l_k = n)$, то*

$$f(t) = \sum_{r=1}^{k} \frac{1}{(l_r - 1)!} \lim_{p \to p_r} \frac{d^{l_r - 1}}{dp^{l_r - 1}} \left((p - p_r)^{l_r} F(p) e^{pt} \right). \qquad (16{:}20)$$

В частности, если все корни $p_1, p_2, \ldots, p_n$ многочлена $Q_n(p)$ простые, то

$$f(t) = \sum_{r=1}^{k} \frac{P_m(p_r)}{Q'_n(p_r)} e^{p_r t}. \qquad (16.21)$$

З а м е ч а н и е. В случае, когда число корней целой функции бесконечно велико, суммы (16.20) и (16.21) становятся бесконечными, т.е. функциональными рядами ($k = \infty$, $n = \infty$).

Пример 1. Найти оригинал $f(t)$ по изображению $F(p) = \dfrac{p+1}{p(p-1)(p+2)}$.

▸ Корни многочлена $Q_3(p) = p(p-1)(p+2)$ – простые и $p_1 = 0$, $p_2 = 1$, $p_3 = -2$. Находим:

$Q'_3(p) = (p-1)(p+2) + p(p+2) + p(p-1)$, $Q'_3(0) = -2$, $Q'_3(1) = 3$, $Q'_3(-2) = 6$.

Тогда из формулы (16.21) следует, что

$$f(t) = -\frac{1}{2} e^{0 \cdot t} + \frac{2}{3} e^{t} - \frac{1}{6} e^{-2t} = -\frac{1}{2} + \frac{2}{3} e^{t} - \frac{1}{6} e^{-2t}. ◂$$

Пример 2. Найти оригинал $f(t)$ по изображению $F(p) = \dfrac{1}{p^2(p^2+1)}$.

▸ Знаменатель $Q_4(p) = p^2(p^2 + 1)$ имеет один действительный корень $p_1 = 0$ кратности $l_1 = 2$ и два простых комплексных корня: $p_2 = i$, $p_3 = -i$. Находим:

$$\lim_{p \to p_1} \frac{d}{dp} \left(p^2 \frac{1}{(p^2+1)} e^{pt} \right) = \lim_{p \to 0} \left(-\frac{2p}{(p^2+1)^2} e^{pt} + \frac{t e^{pt}}{p^2+1} \right) = t.$$

Так как $Q'_4(p) = 2p(p^2 + 1) + 2p^3$, то из формулы (16.20) следует, что

$$f(t) = t+\frac{1}{4i^3+2i}e^{it}+\frac{1}{4(-i)^3-2i}e^{-it} = t+\frac{i}{4-2}e^{it}-\frac{i}{4-2}e^{-it} =$$

$$= t+\frac{1}{2}i(\cos t+i\sin t)-\frac{1}{2}i(\cos t-i\sin t) = t-\sin t\ . ◂$$

Пример 3. Найти оригинал $f(t)$ по изображению $F(p) = \dfrac{\operatorname{ch} p}{p\operatorname{sh} p}$.

▸ Целая функция $Q(p) = p\operatorname{sh} p$ имеет один действительный корень $p_0 = 0$ кратности $l = 2$ и счетное число мнимых корней $p_k = \pm k\pi i$, $k = 1, 2, \ldots$. Тогда находим: $Q'(p) = \operatorname{sh} p + p\operatorname{ch} p$ и $Q'(p_k) = \pm k\pi i\operatorname{ch}(k\pi i) =$

$= \pm k\pi i\cos k\pi = \pm k\pi i(-1)^k$. Поэтому из формулы (16.21) следует, что мнимым корням знаменателя изображения соответствуют в оригинале слагаемые

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^k}{k\pi i(-1)^k}e^{k\pi it}+\frac{(-1)^k}{-k\pi i(-1)^k}e^{-k\pi it}\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{ik\pi}(e^{k\pi it}+e^{-k\pi it}) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k\pi}2\sin k\pi t = \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\sin k\pi t\ .$$

Слагаемое оригинала, соответствующее корню $p_0 = 0$ кратности $l = 2$, равно

$$\lim_{p\to 0}\frac{d}{dp}\left(p^2\frac{\operatorname{ch} p}{p\operatorname{sh} p}e^{pt}\right) = \lim_{p\to 0}\left(\frac{\operatorname{ch} p}{\operatorname{sh} p}e^{pt}-e^{pt}\frac{1}{\operatorname{sh}^2 p}p+\frac{p\operatorname{ch} p}{\operatorname{sh} p}te^{pt}\right) =$$

$$= \lim_{p\to 0}\left(\frac{p}{\operatorname{sh} p}\operatorname{ch} pte^{pt}+e^{et}\frac{\operatorname{ch} p\operatorname{sh} p-p}{\operatorname{sh}^2 p}\right) =$$

$$= t\lim_{p\to 0}\operatorname{ch} p\ +\ \lim_{p\to 0}\frac{\operatorname{ch}^2 p+\operatorname{sh}^2 p-1}{2\operatorname{sh} p\operatorname{ch} p} = t+\lim_{p\to 0}\frac{2\operatorname{sh} p+1-1}{2\operatorname{sh} p\operatorname{ch} p} = t\,.$$

Для раскрытия неопределенностей было использовано правило Лопиталя.

Таким образом, искомый оригинал $f(t) = t+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\sin k\pi t$. ◂

На практике вместо формул (16.20) и (16.21) часто пользуются теоремой о разложении правильных рациональных дробей $F(p) = \dfrac{P_m(p)}{Q_n(p)}$ в сумму простейших рациональных дробей, как это делали при интегрировании рациональных дробей. Изображение в данном случае можно разложить в сумму простейших рациональных дробей следующих типов:

I. $\dfrac{A}{p-\alpha}$; II. $\dfrac{A}{(p-\alpha)^k}$, $k \geq 2$;

III. $\dfrac{Bp+C}{p^2+a_1p+a_2}$, $a_1^2-4a_2<0$; IV. $\dfrac{Bp+C}{(p^2+a_1p+a_2)^k}$.

Для нахождения оригиналов, соответствующих дробям I – III типа, используют следующие формулы:

$$\frac{A}{p-\alpha} \risingdotseq Ae^{\alpha t} \text{ (для дроби типа I)}; \tag{16.22}$$

$$\frac{A}{(p-\alpha)^k} \risingdotseq \frac{A}{(k-1)!}t^{k-1}e^{\alpha t} \text{ (для дроби типа II)}; \tag{16.23}$$

$$\frac{Bp+C}{p^2+a_1p+a_2} \risingdotseq e^{-\frac{a_1}{2}t}\left(B\cos t\sqrt{a_2-\frac{a_1^2}{4}}+\frac{C-\frac{Ba_1}{2}}{\sqrt{a_2-\frac{a_1^2}{4}}}\sin t\sqrt{a_2-\frac{a_1^2}{4}}\right) \tag{16.24}$$

(для дроби типа III).

Оригинал, соответствующий дроби типа IV, весьма громоздкий, поэтому мы его не приводим. В некоторых случаях он может быть получен более простым путем, с использованием свойств оригиналов и их изображений.

Пример 4. Найти оригинал $f(t)$ по изображению $F(p)=\dfrac{3p-2}{p(p-1)(p+3)}$.

▸ Функция $F(p)$ разложима в сумму простейших дробей вида $F(p) = \dfrac{A}{p}+\dfrac{B}{p-1}+\dfrac{C}{p+3}$.

Дроби в правой части последнего равенства приводим к общему знаменателю. Числитель полученной дроби приравниваем к $3p-2$:

$$3p-2 = A(p-1)(p+3)+Bp(p+3)+Cp(p-1).$$

При $p=0$ имеем уравнение $-2=-3A$, $A=2/3$, при $p=1$ – уравнение $1=4B$, $B=1/4$, а при $p=-3$ – уравнение $-11=12C$, $C=-11/12$. Следовательно,

$$F(p) = \frac{2/3}{p}+\frac{1/4}{p-1}-\frac{11/2}{p+3}.$$

По формуле (16.22) находим оригинал:

$$f(t) = \frac{2}{3}+\frac{1}{4}e^{t}-\frac{11}{12}e^{-3t}. ◂$$

Пример 5. Найти оригинал по изображению $F(p)=\dfrac{p+3}{p^4+5p^2+4}$.

▸ Данное изображение представим в виде

$$\frac{p+3}{p^4+5p^2+4}=\frac{Ap+B}{p^2+4}+\frac{Cp+D}{p^2+1}.$$

Приведя к общему знаменателю дроби, стоящие в правой части последнего равенства, и приравняв числители, получим тождество

$$p+3=(Ap+B)(p^2+1)+(Cp+D)(p^2+4).$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях p в обеих частях тождества. Получим систему уравнений:

$$\left.\begin{array}{l|l} p^3 & 0 = A+C, \\ p^2 & 0 = B+D, \\ p & 1 = A+4C, \\ p^0 & 3 = B+4D, \end{array}\right\} \text{ откуда } \left.\begin{array}{l} A = -\frac{1}{3}, \\ B = -1, \\ C = \frac{1}{3}, \\ D = 1. \end{array}\right\}$$

Таким образом,

$$F(p)=\frac{(-1/3)p-1}{p^2+4}+\frac{(1/3)p+1}{p^2+1}=-\frac{1}{3}\frac{p}{p^2+4}-\frac{1}{2}\frac{2}{p^2+4}+\frac{1}{3}\frac{p}{p^2+1}+\frac{1}{p^2+1}.$$

Используя формулы из прил. 2, находим:

$$f(t)=-\frac{1}{3}\cos 2t-\frac{1}{2}\sin 2t+\frac{1}{3}\cos t+\sin t. \blacktriangleleft$$

Пример 6. Найти оригинал $f(t)$ по изображению

$$F(p)=\frac{(5p+4)e^{-3p}}{(p-1)^2(p^2+2p+5)}.$$

▸ Вначале находим оригинал изображения

$$F_1(p)=\frac{5p+4}{(p-1)^2(p^2+2p+5)},$$

разложение которого на простейшие дроби имеет вид

$$\frac{5p+4}{(p-1)^2(p^2+2p+5)}=\frac{A_1}{(p-1)^2}+\frac{A_2}{p-1}+\frac{Bp+C}{p^2+2p+5}.$$

Приведя правую часть этого равенства к общему знаменателю и приравняв числители в правой и левой частях, получим тождество

$$5p+4=A_1(p^2+2p+5)+A_2(p-1)(p^2+2p+5)+(Bp+C)(p-1)^2.$$

Полагая в нем $p=1$, находим, что $9=8A$, $A=9/8$.

Теперь приравняем в полученном тождестве коэффициенты при p^3, p^2 и p^0. В результате имеем систему уравнений:

$$0=A_2+B,\ 0=A_1+A_2+C-2B,\ 4=5A_1-5A_2+C.$$

Ее решение: $A_1=9/8$, $A_2=1/16$, $B=-1/16$, $C=-21/16$. Таким образом,

$$\frac{5p+4}{(p-1)^2(p^2+2p+5)} = \frac{9}{8}\frac{1}{(p-1)^2}+\frac{1}{16}\frac{1}{p-1}-\frac{1}{16}\frac{p+21}{p^2+2p+5} =$$

$$= \frac{9}{8}\frac{1}{(p-1)^2}+\frac{1}{16}\frac{1}{p-1}-\frac{1}{16}\frac{(p+1)+20}{(p+1)^2+4} \doteqdot \frac{9}{8}te^t+\frac{1}{16}e^t-\frac{1}{16}e^{-t}\cos 2t-\frac{5}{8}e^{-t}\sin 2t .$$

Согласно свойству запаздывания искомый оригинал

$$f(t) = (\frac{9}{8}(t-3)e^{t-3}+\frac{1}{16}e^{t-3}-\frac{1}{16}e^{-(t-3)}\cos 2(t-3)-$$

$$-\frac{5}{8}e^{-(t-3)}\sin 2(t-3))\sigma_0(t-3) \ . ◀$$

Пример 7. Найти оригинал $f(t)$ изображения $F(p) = \frac{1}{p^2}\cos\frac{1}{p}$.

▶ Используем разложение $\cos\frac{1}{p}$ в степенной ряд:

$$\cos\frac{1}{p} = 1-\frac{1}{2!}\frac{1}{p^2}+\frac{1}{4!}\frac{1}{p^4}+\ldots+(-1)^{n-1}+\frac{1}{(2n-2)!}\frac{1}{p^{2(n-1)}}+\ldots \ .$$

Получим:

$$\frac{1}{p^2}\cos\frac{1}{p} = \frac{1}{p^2}-\frac{1}{2!}\frac{1}{p^4}+\frac{1}{4!}\frac{1}{p^6}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-2)!}\frac{1}{p^{2n}}+\ldots \ .$$

Тогда формально искомый оригинал можно записать в виде

$$f(t) = t-\frac{1}{2!}\frac{t^3}{3!}+\frac{1}{4!}\frac{t^5}{5!}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-2)!}\frac{t^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ldots \ . ◀$$

Пример 8. Найти оригинал $f(t)$ изображения $F(p) = \frac{1}{(p-2)(p+3)}$, используя теорему свертывания.

▶ Запишем $F(p)$ в виде $\frac{1}{p-2}\,\frac{1}{p+3}$. Так как $\frac{1}{p-2} \doteqdot e^{2t}$, $\frac{1}{p+3} \doteqdot e^{-3t}$, то по теореме свертывания имеем:

$$\frac{1}{(p-2)(p+3)} \doteqdot f(t) = \int_0^t e^{-3\tau}e^{2(t-\tau)}d\tau = \int_0^t e^{2t}e^{-5\tau}d\tau = -\frac{1}{5}e^{2t}e^{-5\tau}\Big|_o^t =$$

$$= \frac{1}{5}e^{2t}-\frac{1}{5}e^{-3t}, \quad f(t) = \frac{1}{5}(e^{2t}-e^{-3t}) \ . ◀$$

АЗ-16.4

Найти оригинал по заданному изображению.

1. $F(p) = \dfrac{4-p}{p^2+4p+8}$. (*Ответ:* $e^{-2t}\cos 2t + 3e^{-2t}\sin 2t$.)

2. $F(p) = \dfrac{3p+5}{p^2-4p+13}$. (*Ответ:* $3e^{2t}\cos 3t + \dfrac{11}{3}e^{2t}\sin 3t$.)

3. $F(p) = \dfrac{2p-3}{p^3+p^2-12p}$. (*Ответ:* $\dfrac{1}{4} - \dfrac{11}{28}e^{-4t} + \dfrac{1}{7}e^{3t}$.)

4. $F(p) = \dfrac{1}{p^3-8}$. (*Ответ:* $\dfrac{1}{12}e^{2t} - \dfrac{1}{12}e^{-t}(\cos\sqrt{3}t +$ $+\sqrt{3}\sin\sqrt{3}t)$.)

5. $F(p) = \dfrac{1}{p^5-5p^3+4p}$. (*Ответ:* $\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{3}\text{ch}\ t + \dfrac{1}{2}\text{sh}\ 2t$.)

6. $F(p) = \dfrac{1}{p^2(p+1)(p+2)}$. (*Ответ:* $\dfrac{1}{2}t - \dfrac{3}{4} + e^{-t} - \dfrac{1}{4}e^{-2t}$.)

7. $F(p) = \dfrac{6p^2e^{-2p}}{(p+2)(p-1)(p^2+1)}$. (*Ответ:* $\Big(-\dfrac{8}{5}e^{-2(t-2)} +$ $+ e^{t-2} + \dfrac{3}{5}(\cos(t-2) + 3\sin(t-2))\Big)\sigma_0(t-2)$.)

АЗ-16.5

Используя теорему Бореля, найти оригинал, соответствующий указанному изображению.

1. $\dfrac{1}{(p-1)(p+2)}$. (*Ответ:* $\dfrac{1}{3}(e^t - e^{-2t})$.)

2. $\dfrac{1}{(p+1)(p+2)}$. (*Ответ:* $e^{-t} - e^{-2t}$.)

3. $\dfrac{p}{(p^2+1)(p^2+4)}$. (*Ответ:* $\frac{1}{3}(\cos t - \cos 2t)$.)

4. $\dfrac{p^2}{(p^2+4)(p^2+9)}$. (*Ответ:* $\frac{1}{5}(3\sin 3t - 2\ \sin 2t)$.)

5. $\dfrac{p}{p^4-1}$. (*Ответ:* $\frac{1}{2}(\mathrm{ch}\ t - \cos t)$.)

Применив теорему Дюамеля, найти оригинал, соответствующий данному изображению.

6. $\dfrac{1}{p^3(p^2+1)}$. (*Ответ:* $\dfrac{t^2}{2} + \cos t - 1$.)

7. $\dfrac{p^3 e^{-2p}}{(p^2+2)^2}$.

(*Ответ:* $(\cos 3(t-2) - 1{,}5(t-2)\sin 3(t-2))\sigma_0(t-2)$.)

8. Используя теорему о разложении, найти оригинал по изображению $F(p) = \dfrac{p^2+1}{p^2(p^2-1)^2}$. (*Ответ*: $t - 2\ \mathrm{ch}\ t + t\,\mathrm{ch}\ t$.)

9. Найти оригинал по изображению $F(p) = \dfrac{p^3}{(p^2+1)^3}$.

(*Ответ*: $\frac{1}{8}t^2\cos t + \frac{3}{8}t\sin t$.)

10. Найти оригинал **в виде** степенного ряда по изображению

$F(p) = \dfrac{1}{\sqrt{p}}\sin\dfrac{1}{\sqrt{p}}$. (*Ответ*: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{t^{2n}}{(2n!)^2}$.)

11. Найти оригинал в виде степенного ряда по изображению

$F(p) = \dfrac{1}{p}e^{1/p^2}$. (*Ответ*: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{2n}}{n!(2n)!}$.)

Самостоятельная работа

Найти оригинал по заданному изображению.

1. $F(p) = \dfrac{p^2}{(p^2+4)^2}$. (*Ответ:* $\frac{1}{2}t\cos 2t + \frac{1}{4}\sin 2t$.)

2. $F(p) = \dfrac{p}{(p^2+1)^2}$. (*Ответ:* $\frac{1}{2}t\sin t$.)

3. $F(p) = \dfrac{1}{p^2(p^2+9)}$. (*Ответ:* $\frac{1}{3}t - \frac{1}{27}\sin 3t$.)

16.3. ПРИЛОЖЕНИЯ ОПЕРАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Решение дифференциальных уравнений и их систем. Пусть дано линейное дифференциальное уравнение n-го порядка с постоянными коэффициентами

$$a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \ldots + a_ny = f(t) \qquad (16.25)$$

и начальные условия

$$y(0) = y_0,\ y'(0) = y'_0,\ \ldots,\ y^{(n-1)}(0) = y_0^{(n-1)}. \qquad (16.26)$$

Будем считать, что функция $f(t)$ и решение $y(t)$ уравнения (16.25) вместе с производными до n-го порядка включительно являются оригиналами и $y(t) \doteqdot Y(p)$, $f(t) \doteqdot F(p)$. Тогда, согласно правилу дифференцирования оригинала и свойству линейности, дифференциальному уравнению (16.25) с начальными условиями (16.26) будет соответствовать *операторное (изображающее) уравнение*

$$(a_0p^n + a_1p^{n-1} + \ldots + a_n)Y(p) = F(p) + \Phi_{n-1}(p), \qquad (16.27)$$

где $\Phi_{n-1}(p) = a_0(p^{n-1}y_0 + p^{n-2}y'_0 + \ldots + y_0^{(n-1)}) + a_1(p^{n-2}y_0 + p^{n-3}y'_0 + \ldots + y_0^{(n-2)}) + \ldots + a_{n-2}(py_0 + y'_0) + a_{n-1}y_0$ – многочлен степени не выше $n-1$ относительно p. Если ввести обозначение $\varphi_n(p) = a_0p^n + a_1p^{n-1} + \ldots + a_n$, то изображающее уравнение (16.27) примет вид

$$\varphi_n(p)Y(p) = F(p) + \Phi_{n-1}(p). \qquad (16.28)$$

Из уравнения (16.28) определим изображение решения дифференциального уравнения (16.25), удовлетворяющего начальным условиям (16.26):

$$Y(p) = \frac{F(p)}{\varphi_n(p)} + \frac{\Phi_{n-1}(p)}{\varphi_n(p)}. \qquad (16.29)$$

Решением уравнения (16.25) при условиях (16.26) будет оригинал $y(t)$, найденный по изображению (16.29).

В случае нулевых начальных условий $y(0) = y'(0) = y''(0) = \ldots = y^{(n-1)}(0) = 0$ уравнение (16.28) примет упрощенный вид $\varphi_n(p)\,Y(p) = F(p)$, как и изображение решения $Y(p) = F(p)/\varphi_n(p)$.

Замечание. Для того чтобы найти общее решение дифференциального уравнения (16.25) указанным выше методом, достаточно задать начальные условия в виде $y(0) = C_1$, $y'(0) = C_2$, ..., $y^{(n-1)}(0) = C_k$, где C_k ($k = 1, 2, \ldots, n$) – произвольные постоянные.

Пример 1. Найти решение дифференциального уравнения $y'' - 3y' + 2y = 0$, если $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

▶ Находим соответствующее операторное уравнение: $p^2 Y(p) - 1 - 3p\,Y(p) + 2\,Y(p) = 0$. Отсюда

$$(p^2 - 3p + 2)\ Y(p) = 1,\ Y(p) = \frac{1}{(p^2 - 3p + 2)},\quad Y(p) = \frac{A}{p-1} + \frac{B}{p-2}.$$

Тогда из тождества $1 \equiv A(p-2) + B(p-1)$ при $p = 1$ имеем: $1 = -A$, $A = -1$, а при $p = 2$ получаем: $1 = B$. Поэтому $Y(p) = \frac{-1}{p-1} + \frac{1}{p-2}$. По формулам из прил. 2 находим частное решение дифференциального уравнения: $y(t) = -e^t + e^{2t}$. ◀

Пример 2. Найти решение дифференциального уравнения $y'' - 2y' + 10y = 10t^2 + 18t + 6$, удовлетворяющее условиям $y(0) = 1$, $y'(0) = 3{,}2$.

▶ Составляем изображающее уравнение, пользуясь операторными равенствами:

$$y(t) \risingdotseq Y(p),\ y'(t) \risingdotseq p\,Y(p) - 1,\ y''(t) \risingdotseq p^2\,Y(p) - p - 3{,}2;\ t^2 \risingdotseq \frac{2}{p^3},$$

$$t \risingdotseq \frac{1}{p^2},\ 1 \risingdotseq \frac{1}{p}.$$

В результате получаем операторное уравнение для данного дифференциального уравнения:

$$p^2\,Y(p) - p - 3{,}2 - 2p\,Y(p) + 2 + 10\,Y(p) = \frac{20}{p^3} + \frac{18}{p^2} + \frac{6}{p}.$$

Отсюда

$$(p^2-2p+10)\,Y(p) = \frac{20}{p^3}+\frac{18}{p^2}+\frac{6}{p}+p+1{,}2\,,$$

$$Y(p) = \frac{p^4+1{,}2p^3+6p^2+18p+20}{p^3(p^2-2p+10)}\,.$$

Разложим $Y(p)$ на простейшие дроби стандартным методом. Имеем:

$$Y(p) = \frac{A}{p^3}+\frac{B}{p^2}+\frac{C}{p}+\frac{Dp+E}{p^2-2p+10}\,,$$

$$p^4+1{,}2p^3+6p^2+18p+20 \equiv A(p^2-2p+10)+Bp(p^2-2p+10)+$$

$$+\,Cp^2(p^2-2p+10)+(Dp+E)p^3\,.$$

Из последнего тождества при $p=0$ находим, что $20=10A$, $A=2$. Для определения остальных коэффициентов разложения приравняем коэффициенты этого равенства, стоящие при одинаковых степенях p:

$$\begin{aligned} p^4 &\,|\, 1 = C+D,\\ p^3 &\,|\, 1{,}2 = B-2C+E,\\ p^2 &\,|\, 6 = A-2B+10C,\\ p &\,|\, 18 = -2A+10B. \end{aligned}$$

Решив систему, найдем: $B=2{,}2$, $C=0{,}84$, $E=0{,}68$, $D=0{,}16$. Это означает, что

$$Y(p) = \frac{2}{p^3}+\frac{2{,}2}{p^2}+\frac{0{,}84}{p}+\frac{0{,}16p+0{,}68}{(p-1)^2+9}\,,$$

$$Y(p) = \frac{2}{p^3}+\frac{2{,}2}{p^2}+\frac{0{,}84}{p}+0{,}16\cdot\frac{p-1}{(p-1)^2+9}+0{,}28\cdot\frac{3}{(p-1)^2+9}\,.$$

Отсюда на основании прил. 1 и 2 имеем:

$$y(t) = t^2+2{,}2t+0{,}84+0{,}16e^t\cos 3t+0{,}28e^t\sin 3t\,. ◀$$

Пример 3. Найти решение дифференциального уравнения $y''+2y'+5y = \cos t$, если $y(0)=y'(0)=0$.

▶ Запишем соответствующее операторное уравнение и изображение решения:

$$p^2\,Y(p)+2p\,Y(p)+5\,Y(p) = \frac{p}{p^2+1}\,,\quad Y(p) = \frac{p}{(p^2+2p+5)(p^2+1)}\,,$$

которое разложимо на простейшие дроби, т.е.

$$Y(p) = \frac{Ap+B}{p^2+1}+\frac{Cp+D}{p^2+2p+5}\,.$$

Находим коэффициенты A, B, C, D, пользуясь стандартным методом. Имеем: $p \equiv (Ap+B)(p^2+2p+5)+(Cp+D)(p^2+1)$. Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях p в обеих частях последнего тождества, получим систему уравнений:

$$\begin{aligned} p^3|0 &= A+C, \\ p^2|0 &= B+2A+D, \\ p|1 &= 2B+5A+C, \\ p^0|0 &= 5B+D. \end{aligned}$$

Ее решение: $A=1/5$, $B=1/10$, $C=-1/5$, $D=-1/2$. Тогда

$$Y(p) = \frac{(1/5)p+1/10}{p^2+1}+\frac{(-1/5)p-1/2}{p^2+2p+5} = \frac{1}{5}\frac{p}{p^2+1}+\frac{1}{10}\frac{1}{p^2+1}-\frac{1}{5}\frac{p+1}{(p+1)^2+4}-$$

$$-\frac{3}{20}\frac{2}{(p+1)^2+4}.$$

С помощью прил. 2 находим искомое решение:

$$y(t) = \frac{1}{5}\cos t+\frac{1}{10}\sin t-\frac{1}{5}e^{-t}\cos 2t-\frac{3}{20}e^{-t}\sin 2t. \blacktriangleleft$$

Алгоритм решения систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами состоит в следующем. Для каждого уравнения системы находим операторное уравнение, а затем решаем полученную систему линейных алгебраических уравнений относительно изображений решений исходной системы. Для найденных изображений определяем оригиналы, дающие решение исходной системы.

Пример 4. Найти решение системы уравнений операторным методом:

$$\begin{cases} x'-2x-3y = 5t, \\ y'-3x-2y = 8e^t, \end{cases} \quad x(0)=0,\ y(0)=1.$$

▶ Пусть $x(t) \doteqdot X(p)$, $y(t) \doteqdot Y(p)$. Тогда операторным изображением данной системы будет система

$$\left.\begin{aligned} pX(p)-2X(p)-3\,Y(p) &= \frac{5}{p^2}, \\ p\,Y(p)-1-3X(p)-2\,Y(p) &= \frac{8}{p-1} \end{aligned}\right\} \quad \text{или} \quad \left.\begin{aligned} (p-2)X(p)-3\,Y(p) &= \frac{5}{p^2}, \\ -3X(p)+(p-2)\,Y(p) &= \frac{p+7}{p-1}. \end{aligned}\right\}$$

Решив последнюю систему уравнений относительно $X(p)$ и $Y(p)$, получим:

$$X(p) = \frac{3p^3+26p^2-15p+10}{(p^2-1)(p-5)p^2}, \quad Y(p) = \frac{p^4+5p^3-14p^2+15p-15}{(p^2-1)(p-5)p^2}.$$

Разложим найденные изображения в сумму простейших рациональных дробей:

$$X(p) = \frac{A_1}{p^2} + \frac{A_2}{p} + \frac{B_1}{p-1} + \frac{B_2}{p+1} + \frac{C}{p-5},$$

$$3p^2 + 26p^2 - 15p + 10 \equiv A_1(p^2-1)(p-5) + A_2 p(p^2-1)(p-5) +$$

$$+ B_1 p^2(p+1)(p-5) + Cp^2(p^2-1) + B_2 p^2(p-1)(p-5).$$

Из последнего тождества имеем: $10 = 5A_1$, $A_1 = 2$ при $p = 0$; $24 = -8B_1$, $B_1 = -3$ при $p = 1$; $48 = 12B_2$, $B_2 = 4$ при $p = -1$; $960 = 600C$, $C = 8/5$ при $p = 5$. Так как коэффициент при p^4 $A_2 + B_1 + B_2 + C = 0$, то $A_2 = -13/5$. Поэтому

$$X(p) = \frac{2}{p^2} - \frac{13}{5}\frac{1}{p} - 3\frac{1}{p-1} + 4\frac{1}{p+1} + \frac{8}{5}\frac{1}{p-5}.$$

Из разложения

$$Y(p) = \frac{A}{p^2} + \frac{B}{p} + \frac{C}{p-1} + \frac{D}{p+1} + \frac{E}{p-5},$$

аналогично тому, как это было сделано в разложении для $X(p)$, находим, что $A = -3$, $B = 12/5$, $C = 1$, $D = -4$, $E = 8/5$. Поэтому

$$Y(p) = -\frac{3}{p^2} + \frac{12}{5}\frac{1}{p} + \frac{1}{p-1} + 4\frac{1}{p+1} + \frac{8}{5}\frac{1}{p-5}.$$

Из выражений для $X(p)$ и $Y(p)$ с помощью прил. 2 находим решение исходной системы:

$$x(t) = 2t - \frac{13}{5} + \frac{9}{4}e^{t} + \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{3}{20}e^{5t},$$

$$y(t) = -3t + \frac{12}{5} + e^{t} - 4e^{-t} + \frac{8}{5}e^{5t}. ◀$$

Пример 5. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y''' - y'' + 4y' - 4y = (t-2)e^{-2t}.$$

▶ Составим операторное уравнение при произвольных значениях $y(0)$, $y'(0)$, $y''(0)$:

$$p^3 Y(p) - y(0)p^2 - y'(0)p - y''(0) - p^2 Y(p) + y(0)p + y'(0) + 4pY(p) - 4y(0) -$$

$$-4Y(p) = \frac{1}{(p+2)^2} - \frac{2}{p+2}.$$

Решив его относительно $Y(p)$, получим:

$$Y(p) = \frac{p^2 y(0) + (y'(0) - y(0))p + y''(0) - y'(0) + 4y(0)}{p^3 - p^2 + 4p - 4} +$$
$$+ \frac{-2p-3}{(p+2)^2(p-1)(p^2+4)}.$$

Так как знаменатель первого слагаемого разложим на множители $p-1$ и p^2+4, а в числитель входят любые значения $y(0)$, $y'(0)$, $y''(0)$, то это слагаемое можно представить в виде

$$\frac{c_1}{p-1} + \frac{c_2 p + c_3}{p^2+4},$$

где c_1, c_2, c_3 – произвольные постоянные. Второе слагаемое разложим в сумму простейших рациональных дробей:

$$\frac{-2p-3}{(p+2)^2(p-1)(p^2+4)} = \frac{A}{(p+2)^2} + \frac{B}{p+2} + \frac{C}{p-1} + \frac{Dp+E}{p^2+4}.$$

Искомые коэффициенты A, B, C, D, E найдем известными методами. Имеем:

$$-2p-3 \equiv A(p-1)(p^2+4) + B(p+2)(p-1)(p^2+4) + C(p+2)^2(p^2+4) +$$
$$+ (Dp+E)(p+2)^2(p-1).$$

При $p=-2$ находим: $1=-24A$, $A=-1/24$, при $p=1$ получаем: $5=-45C$, $C=-1/9$.

Приравняв коэффициенты при p^4, p^3 и p^2, получим систему уравнений для нахождения остальных неизвестных:

$$\left.\begin{aligned} B + C + D &= 0, \\ A + B + 4C + 3D + E &= 0, \\ -A + 2B + 8C + 3E &= 0, \end{aligned}\right\}$$

откуда $B = \dfrac{43}{144}$, $D = -\dfrac{27}{144}$, $E = \dfrac{1}{12}$.

Таким образом,

$$Y(p) = \frac{c_1}{p-1} + \frac{c_2 p + c_3}{p^2+4} + \left(-\frac{1}{24}\right)\frac{1}{(p+2)^2} + \frac{43}{144}\frac{1}{p+2} - \frac{1}{9}\frac{1}{p-1} +$$
$$+ \frac{-(27/144)p + 1/12}{p^2+4}.$$

Используя прил. 1 и 2, находим оригинал

$$y(t) = c_1 e^t + c_2 \cos 2t + \frac{1}{2}c_3 \sin 2t - \frac{1}{24}te^{-2t} + \frac{43}{144}e^{-2t} - \frac{1}{9}e^t -$$
$$-\frac{27}{144}\cos 2t + \frac{1}{24}\sin 2t,$$

являющийся общим решением данного дифференциального уравнения, где c_1, c_2, c_3 – произвольные постоянные. ◂

Пример 6. Найти решение системы уравнений

$$\left.\begin{aligned} x'' + y' + x &= e^t, \\ x' + y'' &= 1, \end{aligned}\right\}$$

удовлетворяющее начальным условиям $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 2$.

▸ Составим систему операторных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} p^2 X(p) - p + pY(p) + 1 + X(p) &= \frac{1}{p-1}, \\ pX(p) - 1 + p^2 Y(p) + p - 2 &= \frac{1}{p}. \end{aligned}\right\}$$

Выполнив простые преобразования, получим систему

$$\left.\begin{aligned} (p^2+1)X(p) + pY(p) &= \frac{p^2 - 2p + 1}{p-1}, \\ pX(p) + p^2 Y(p) &= \frac{-p^2 + 3p + 1}{p}, \end{aligned}\right\}$$

из которой найдем, что

$$X(p) = \frac{p^4 - p^3 - 2p^2 + 2p + 1}{p^4(p-1)} = -\frac{1}{p^4} - \frac{3}{p^3} - \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p-1},$$

$$Y(p) = \frac{-p^5 + 3p^4 - p^3 + p^2 + 2p - 1}{p^5(p-1)} = \frac{1}{p^5} + \frac{3}{p^4} + \frac{2}{p^3} + \frac{3}{p^2} - \frac{1}{p-1}.$$

Воспользовавшись свойством линейности и прил. 2, получим решение системы:

$$x(t) = -\frac{1}{6}t^3 - \frac{3}{2}t^2 - t + e^t, \quad y(t) = \frac{1}{24}t^4 - \frac{1}{2}t^3 + t^2 + 3t - e^t. \blacktriangleleft$$

Решение интегральных и интегрально-дифференциальных уравнений. *Операционный метод Лапласа* можно применять для решения многих *интегральных уравнений типа свертки*, т.е. уравнений вида

$$y(t) = f(t) + \int_0^t y(\tau)k(t-\tau)\,d\tau, \tag{16.30}$$

где $y(t)$ – искомая неизвестная функция; $f(t)$ – свободный член; $k(t-\tau)$ – ядро уравнения.

Пусть $y(t) \risingdotseq Y(p)$, $f(t) \risingdotseq F(p)$ и $k(t) \risingdotseq K(p)$. Тогда на основании теоремы Бореля о свертке оригиналов получаем, что $Y(p) = F(p) - Y(p)K(p)$. Отсюда $Y(p) = \dfrac{F(p)}{1-K(p)}$ – изображение искомого решения интегрального уравнения (16.30). Решение $y(t)$ является оригиналом, соответствующим найденному изображению $Y(p)$.

Пример 7. Решить интегральное уравнение $y(t)+2\int\limits_0^t y(\tau)\cos(t-\tau)d\tau = e^{-t}$.

▶ Обозначим $y(t) \doteqdot Y(p)$. Так как $e^{-t} \doteqdot \dfrac{1}{p+1}$, $\cos t \doteqdot \dfrac{p}{p^2+1}$, то соответствующее исходному операторное уравнение примет вид

$$Y(p)+\frac{2pY(p)}{p^2+1} = \frac{1}{p+1}.$$

Отсюда легко получим решение интегрального уравнения:

$$Y(p) = \frac{p^2+1}{(p+1)^3} = \frac{2}{(p+1)^3}-\frac{2}{(p+1)^2}+\frac{1}{p+1} \doteqdot t^2e^{-t}-2te^{-t}+e^{-t} =$$

$$= (t^2-2t+1)e^{-t} = (t-1)^2e^{-t} = y(t).\ ◀$$

Пример 8. Найти решение интегрально-дифференциального уравнения $y''+y' = \sin t+\int\limits_0^t y(\tau)\sin(t-\tau)d\tau$ при начальных условиях $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

▶ Положим $y(t) \doteqdot Y(p)$. Поскольку

$$y''(t) \doteqdot p^2Y(p)-1,\quad \sin t \doteqdot \frac{1}{p^2+1},$$

то данное интегрально-дифференциальное уравнение в операторной форме примет вид

$$(p^2+1)Y(p)-1 = \frac{1}{p^2+1}+\frac{Y(p)}{p^2+1},$$

откуда $Y(p) = \dfrac{1}{p^2}$, $y(t) = t$. ◀

Вычисление несобственных интегралов. Один из способов вычисления несобственных интегралов вида $\int\limits_0^{+\infty} f(t)dt$ основан на связи «конечного» значения оригинала и «начального» значения изображения.

Пусть $f(t) \doteqdot F(p)$ и существует $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = f(+\infty) = \lim\limits_{p\to 0} pF(p)$ (см. формулу (16.15)). Так как по теореме об интегрировании оригинала

$\int_0^t f(\tau)d\tau \risingdotseq \frac{1}{p}F(p)$ (см. формулу (16.12)), то при условии сходимости несобственного интеграла $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ справедливо соотношение

$$\int_0^{+\infty} f(t)\,dt = F(0). \qquad (16.31)$$

Оно во многих случаях дает возможность вычислить несобственный интеграл с бесконечным верхним пределом.

Пример 9. Вычислить интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{\sin 2t}{t}dt$.

▸ Так как $\sin 2t \risingdotseq \frac{2}{p^2+4}$, то по теореме об интегрировании изображения (см. формулу (16.13)) имеем:

$$\frac{\sin 2t}{t} \risingdotseq 2\int_p^{+\infty} \frac{du}{u^2+4} = \operatorname{arctg}\frac{u}{2}\Big|_p^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{p}{2} = \operatorname{arcctg}\frac{p}{2}.$$

Тогда из равенства (16.31) следует, что $\int_0^{+\infty} \frac{\sin 2t}{t}dt = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} 0 = \frac{\pi}{2}$. ◂

Пример 10. Вычислить интеграл $\int_0^{+\infty} e^{-t}(\cos 3t \cos t)\,dt$.

▸ Найдем изображение подынтегральной функции:

$$f(t) = e^{-t}(\cos 3t \cos t) = \frac{1}{2}e^{-t}(\cos 4t + \cos 2t) \risingdotseq$$

$$\risingdotseq \frac{1}{2}\left(\frac{p+1}{(p+1)^2+16} + \frac{p+1}{(p+1)^2+4}\right).$$

Тогда из равенства (16.31) следует, что

$$\int_0^{+\infty} e^{-t}(\cos 3t \cos t)\,dt = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{17} + \frac{1}{5}\right) = \frac{11}{85}. \text{ ◂}$$

Способ вычисления несобственных интегралов с помощью операционного исчисления дает также

Теорема (Парсеваля). *Если* $f_1(t) \risingdotseq F_1(p)$, $f_2(t) \risingdotseq F_2(p)$ *и функции* $F_1(p)$, $F_2(p)$ *– аналитические при* $\operatorname{Re} p \geq 0$, *то*

$$\int_0^{+\infty} f_1(u)F_2(u)\,du = \int_0^{+\infty} F_1(v)f_2(v)\,dv. \tag{16.32}$$

Из сходимости одного из интегралов (16.32) следует сходимость другого.

Пример 11. Вычислить интеграл $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha t}\sin\beta t}{t}\,dt$.

▸ Имеем:

$$f_1(t) \risingdotseq e^{-\alpha t}, \ \sin\beta t \risingdotseq \frac{\beta}{(p+\alpha)+\beta^2} = F_1(p),$$

$$F_2(p) = \frac{1}{p} \risingdotseq \sigma_0(t) = f_2(t).$$

Тогда из равенства Парсеваля (16.32) следует, что

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha u}\frac{1}{u}\sin\beta u\,du = \int_0^{+\infty} \frac{\beta}{(v+\alpha)^2+\beta^2}\sigma_0(v)\,dv = \beta\int_0^{+\infty}\frac{1}{(v+\alpha)^2+\beta^2}\,dv =$$

$$= \operatorname{arctg}\frac{v+\alpha}{\beta}\Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{\alpha}{\beta}. \ ◂$$

Пример 12. Вычислить интеграл $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-3t^2}-e^{-2t^2}}{t^2}\,dt$.

▸ Предварительно выполним замену переменной, положив $t^2 = z$. Тогда $t = \sqrt{z}$, $dt = \dfrac{1}{2\sqrt{z}}dz$ и $0 \leq z < +\infty$. Отсюда

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-3t^2}-e^{-2t^2}}{t^2}\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{e^{-3z}-e^{-2z}}{z\sqrt{z}}\,dz.$$

С помощью прил. 2 найдем изображение оригинала:

$$f_1(z) = \frac{e^{-3z}-e^{-2z}}{z} \risingdotseq \ln\frac{p+2}{p+3}.$$

В качестве изображения функции $f_2(z)$ возьмем $F_1(p) = 1/\sqrt{p}$. Из прил. 2, п.17, следует, что $f_2(z) = 1/\sqrt{\pi z}$.

На основании формулы (16.32) получим:

$$\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{e^{-3z}-e^{-2z}}{z\sqrt{z}}dz = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\ln\frac{u+2}{u+3}\frac{1}{\sqrt{\pi u}}du = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\ln\frac{v^2+2}{v^2+3}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{v}2v\,dv =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\ln\frac{v^2+2}{v^2+3}dv = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(v\ln\frac{v^2+2}{v^2+3}\bigg|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty}\left(\frac{2v^2}{v^2+2}-\frac{2v^2}{v^2+3}\right)dv\right) =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\left(\frac{2v^2}{(v^2+2)(v^2+3)}\right)dv,$$

так как $\lim\limits_{v\to+\infty} v\ln\frac{v^2+2}{v^2+3} = 0$.

Вычисляем последний интеграл:

$$\int_0^{+\infty}\left(\frac{2v^2}{(v^2+2)(v^2+3)}\right)dv = \int_0^{+\infty}\left(\frac{6}{v^2+3}-\frac{4}{v^2+2}\right)dv = \frac{6}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{v}{\sqrt{3}}\bigg|_0^{+\infty} -$$

$$-\frac{4}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{v}{\sqrt{2}}\bigg|_0^{+\infty} = \frac{6}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\sqrt{2}}\frac{\pi}{2} = \pi(\sqrt{3}-\sqrt{2}).$$

Искомый интеграл равен $-\sqrt{\pi}(\sqrt{3}-\sqrt{2})$. ◄

Операционное исчисление в электротехнике и механике. В настоящее время в курсе электротехники методы операционного исчисления широко используются при расчете электрических цепей. Эти методы удобны с математической точки зрения. Физической основой расчета электрической цепи являются правила *Кирхгофа.*

Первое правило Кирхгофа (правило узлов). *Алгебраическая сумма токов i_k, сходящихся в точке разветвления проводников (узле), равна нулю:*

$$\sum_{k=1}^{n} i_k = 0, \tag{16.33}$$

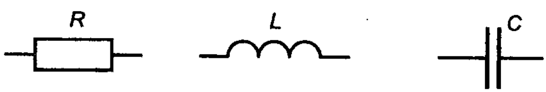
где $n \geq 3$ – число проводников, сходящихся в узле. Положительными считаются токи, подходящие к узлу, отрицательными – токи, отходящие от него.

Второе правило Кирхгофа (правило контуров). *В любом замкнутом контуре, произвольно выбранном в разветвленной цепи проводников, алгебраическая сумма* *падений напряжений на отдельных участках контура равна алгебраической сумме ЭДС в том же контуре:*

$$\sum_{j=1}^{n_1} U_{R_j} + \sum_{j=1}^{n_2} U_{L_j} + \sum_{j=1}^{n_3} U_{C_j} = \sum_{j=1}^{n_4} E_j \,, \qquad (16.34)$$

где U_{R_j}, U_{L_j}, U_{C_j} *– падения напряжений на участках цепи, содержащих резистивный, индуктивный и емкостный элементы соответственно;* E_j *– ЭДС включенных в контур источников электрического тока.*

Падения напряжений на соответствующих участках цепи определяются следующим образом:



$$U_R = Ri, \qquad U_L = L\frac{di}{dt}, \qquad U_C = \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)\,d\tau \,. \qquad (16.35)$$

При использовании правила контуров выбирается определенное направление обхода контура: токи i_k, совпадающие по направлению с направлением обхода, считаются положительными; ЭДС E_j источников тока считаются положительными, если они создают токи, проходящие в направлении обхода контура.

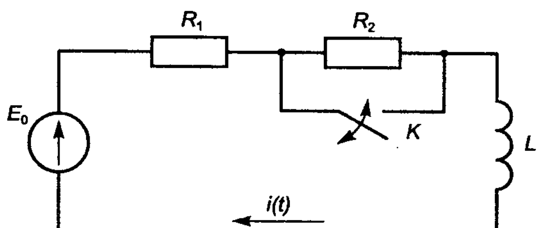


Рис. 16.8

Пример 13. Контур (рис. 16.8) подключен к постоянной ЭДС E_0. Определить силу переходного тока $i\,(t)$ в контуре при отключенном рубильнике K.

▸ В контуре узлов нет, и необходимость в применении первого правила Кирхгофа (16.33) отпадает. Использование второго правила Кирхгофа (16.34) и формул (16.35) приводит к равенству $U_L + U_R = E_0$, т.е. к дифференциальному уравнению с начальным условием:

$$L\frac{di}{dt} + (R_1 + R_2)i = E_0 \,, \; i\,(0) = 0. \qquad (1)$$

Обозначим изображение силы тока $i(t)$ через $I(p)$ и воспользуемся свойствами изображений по Лапласу (см. прил. 1, 2). Тогда для уравнения (1) получим операторное уравнение

$$LpI(p) + (R_1 + R_2)I(p) = E_0/p,$$

решение которого относительно $I(p)$ можно представить в виде

$$I(p) = \frac{E_0}{Lp\left(p + \dfrac{R_1 + R_2}{L}\right)} = \frac{E_0}{R_1 + R_2}\frac{1}{p} - \frac{E_0}{R_1 + R_2}\,\frac{1}{p + \dfrac{R_1 + R_2}{L}}.$$

Отсюда, воспользовавшись п. 1 прил. 1 и п. 1, 2 прил. 2, легко находим решение задачи Коши (1):

$$i(t) = \frac{E_0}{R_1 + R_2}\left(1 - e^{-\frac{R_1 + R_2}{L}t}\right). \blacktriangleleft \qquad (2)$$

Пример 14. В контуре, рассмотренном в примере 13, при установившемся режиме в некоторый момент времени, принимаемый за начальный ($t = 0$), включается рубильник. Определить силу переходного тока $i(t)$.

$\blacktriangleright$ Режим в контуре, описываемый формулой (2) из примера 13, будет установившимся после достаточно большого промежутка времени t, т.е. при $t \to \infty$:

$$i_{\text{уст}} = \lim_{t \to \infty} i(t) = \frac{E_0}{R_1 + R_2}.$$

Получаем другую задачу Коши:

$$L\frac{di}{dt} + R_1 i = E_0,\ i(0) = i_{\text{уст}} = \frac{E_0}{R_1 + R_2}, \qquad (1)$$

операторное уравнение для которой имеет вид

$$L\left(pI(p) - \frac{E_0}{R_1 + R_2}\right) + R_1 I(p) = \frac{E_0}{p}.$$

Решая его относительно изображения $I(p)$, находим:

$$I(p) = \frac{E_0(R_1 + R_2 + Lp)}{p(R_1 + R_2)(Lp + R_1)} = \frac{E_0}{R_1 p} - \frac{E_0 E_2}{R_1(R_1 + R_2)(p + R_1/L)}.$$

Воспользовавшись теми же пунктами прил. 1, 2, что и при получении решения (2) задачи Коши из примера 13, приходим к решению задачи Коши, рассмотренной в данном примере (см. формулу (1)):

$$i(t) = \frac{E_0}{R_1}\left(1 - \frac{R_2}{R_1 + R_2}e^{-(R_1/L)t}\right). \blacktriangleleft$$

Пример 15. Цепь (рис. 16.9) рубильником K включается на постоянное напряжение U. Определить силу переходного тока $i_1(t)$, $i_2(t)$, $i_3(t)$ при условии, что $U = 60$ В, $R_1 = 10$ Ом, $R_2 = 30$ Ом, $L = 0{,}3$ Гн.

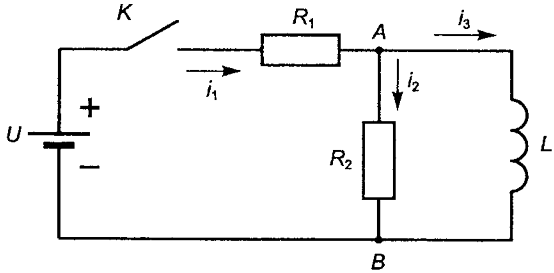


Рис. 16.9

▸ Направление обхода по контурам цепи выберем по ходу часовой стрелки. Согласно первому и второму привилам Кирхгофа получим систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} i_1 - i_2 - i_3 &= 0, \\ R_2 i_2 - L\frac{di_3}{dt} &= 0, \\ R_1 i_1 + L\frac{di_3}{dt} &= U, \end{aligned}\right\} \quad i_1(0) = i_2(0) = \frac{U}{R_1 + R_2}; \quad i_3(0) = 0.$$

Первое уравнение системы определяем по правилу узлов (16.33) для узла A (см. рис. 16.9), второе и третье уравнения – по правилу контуров (16.34) для контуров $ALBA$ и $UALBU$ соответственно с учетом формул (16.35).

Если $I_1(p)$, $I_2(p)$, $I_3(p)$ – изображения токов $i_1(t)$, $i_2(t)$, $i_3(t)$, то соответствующая найденной системе операторная система запишется в виде

$$\left.\begin{aligned} I_1(p) - I_2(p) - I_3(p) &= 0, \\ R_2 I_2(p) - LpI_3(p) &= 0, \\ R_1 I_1(p) + LpI_3(p) &= \frac{U}{p}. \end{aligned}\right\}$$

Решаем данную систему по формулам Крамера. Ее определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & R_2 & -Lp \\ R_1 & 0 & Lp \end{vmatrix} = R_2Lp + R_1(Lp + R_2) = L(R_1 + R_2)p + R_1R_2 =$$

$$= L(R_1 + R_2)\left(p + \frac{R_1 R_2}{L(R_1 + R_2)}\right).$$

Далее,

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & R_2 & -Lp \\ \frac{U}{p} & 0 & Lp \end{vmatrix} = \frac{U}{p}(Lp + R_2) = UL + \frac{UR_2}{p},$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -Lp \\ R_1 & \frac{U}{p} & Lp \end{vmatrix} = UL, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & R_2 & 0 \\ R_1 & 0 & \frac{U}{p} \end{vmatrix} = \frac{R_2 U}{p}.$$

Последовательно находим:

$$I_1(p) = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{ULp + UR_2}{L(R_1 + R_2)p\left(p + \frac{R_1 R_2}{L(R_1 + R_2)}\right)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p + \frac{R_1 R_2}{L(R_1 + R_2)}},$$

$$\frac{ULp + UR_2}{L(R_1 + R_2)} \equiv A\left(p + \frac{R_1 R_2}{L(R_1 + R_2)}\right) + Bp.$$

Из данного тождества при $p = 0$ получаем:

$$A\frac{R_1 R_2}{L(R_1 + R_2)} = \frac{UR_2}{L(R_1 + R_2)}, \quad A = \frac{U}{R_1}.$$

Приравниваем коэффициенты при p в левой и правой частях тождества:

$$\frac{UL}{L(R_1 + R_2)} = A + B, \quad B = -\frac{UR_2}{R_1(R_1 + R_2)}.$$

$$I_1(p) = \frac{U}{R_1}\frac{1}{p} - \frac{UR_2}{R_1(R_1 + R_2)}\frac{1}{p + R_1 R_2 / L(R_1 + R_2)}.$$

По прил. 2 находим оригинал:

$$i_1(t) = \frac{U}{R_1}\left(1 - \frac{R_2}{R_1 + R_2}e^{-\frac{R_1 R_2}{L(R_1 + R_2)}t}\right).$$

Аналогично получаем:

$$I_2(p) = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{U}{(R_1 + R_2)\left(p + \frac{R_1 R_2}{L(R_1 + R_2)}\right)},$$

$$i_2(t) = \frac{U}{R_1 + R_2} e^{-\frac{R_1 R_2}{L(R_1 + R_2)} t},$$

$$I_3(p) = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{R_2 U}{L(R_1 + R_2) p \left(p + \frac{R_1 R_2}{L(R_1 + R_2)}\right)} = \frac{U}{R_1}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p + \frac{R_1 R_2}{L(R_1 + R_2)}}\right),$$

$$i_3(t) = \frac{U}{R_1}\left(1 - e^{-\frac{R_1 R_2}{L(R_1 + R_2)} t}\right).$$

Подставив числовые значения U, R_1, R_2, L в выражения для $i_1(t)$, $i_2(t)$, $i_3(t)$, получим:

$$i_1(t) = 6 - 4{,}5e^{-2{,}5t}, \; i_2(t) = 1{,}5e^{-2{,}5t}, \; i_3(t) = 6(1 - e^{-2{,}5t}).$$ ◂

Пример 16. Электрическая цепь, состоящая из последовательно соединенных конденсатора емкостью C, катушки с индуктивностью L и электрического сопротивления R, подсоединена к ЭДС E (рис. 16.10). Найти дифференциальные уравнения, описывающие законы изменения электрического заряда $q(t)$ на обкладках конденсатора и силы тока $i(t)$ в цепи.

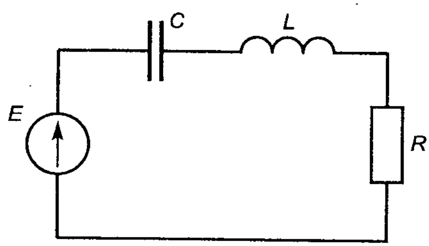


Рис. 16.10

▸ Цепь не содержит узлов, поэтому используем только второе правило Кирхгофа (16.34) и формулы (16.35):

$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)\,d\tau = E. \qquad (1)$$

Из электротехники известно, что $i = -\frac{dq}{dt}$. Следовательно, $\frac{di}{dt} = -\frac{d^2q}{dt^2}$ и с учетом уравнения (1) имеем:

$$L\frac{d^2q}{dt^2}+R\frac{dq}{dt}+\frac{q}{C}=-E. \qquad (2)$$

Дифференцируя обе части уравнения (1), приходим к уравнению для силы тока:

$$L\frac{d^2i}{dt^2}+R\frac{di}{dt}+\frac{i}{C}=\frac{dE}{dt}. \blacktriangleleft \qquad (3)$$

Полученные дифференциальные уравнения (1)–(3) для $q(t)$ и $i(t)$ легко решаются операторным методом, но дают качественно разные решения в зависимости от значений L, R, C и E. Эти случаи достаточно подробно описаны во многих учебниках, например в [1], и здесь мы их рассматривать не будем. Отметим только, что решения могут быть периодическими, затухающими периодическими, апериодическими и резонансными.

Замечание. Колебания ряда механических упругих систем с одной степенью свободы описываются дифференциальными уравнениями вида (2), (3). Например, колебания материальной точки массой m задаются уравнением

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+\lambda\frac{dx}{dt}+kx=f(t), \qquad (16.36)$$

где $x(t)$ – отклонение точки от положения равновесия; λ и k связаны с коэффициентом трения и частотой свободных колебаний системы; $f(t)$ – внешняя возмущающая систему сила.

Уравнение (16.36) может описывать также крутильные колебания маховика на упругом валу, если $x(t)$ – угол поворота маховика, коэффициент k связан с крутильной жесткостью вала, а $f(t)$ – момент внешних сил относительно оси вращения.

Таким образом, различные физические процессы описываются однотипными дифференциальными уравнениями (2), (3) и (16.36), которые могут быть приведены к виду (16.25) и решены с помощью операторного уравнения (16.29).

Применение импульсных функций. В § 16.1 настоящего пособия рассмотрены импульсные функции первого и второго порядка $\delta(t)$ и $\delta_1(t)$ соответственно. Эти функции можно встретить при решении задач из области механики, электротехники, гравитации, где они выступают как внешние силы, мгновенно действующие на физическую систему.

Пример 17. Методами операционного исчисления решить задачу Коши:

$$y''+2y'+5y=a\delta(t-t_0),\ y(0)=y_0,\ y'(0)=y'_0. \qquad (1)$$

▸ Составим операторное уравнение ($a=\text{const}$):

$$(p^2+2p+5)Y(p)=(p+2)y_0+y'_0+ae^{-pt_0}.$$

и найдем изображение решения $Y(p)$:

$$Y(p) = \frac{(p+2)y_0 + y'_0 + ae^{-pt_0}}{p^2+2p+5} = y_0\frac{p+1}{(p+1)^2+4} + \frac{y_0+y'_0+ae^{-pt_0}}{(p+1)^2+4}.$$

По изображению $Y(p)$ с помощью прил. 1, 2 находим оригинал $y(t)$, т.е. решение поставленной задачи Коши:

$$y(t) = e^{-t}\left(y_0\cos 2t + \frac{y_0+y'_0}{2}\sin 2t\right) + \frac{a}{2}\sigma_0(t-t_0)e^{-(t-t_0)}\sin 2(t-t_0).$$

Движение до момента $t = t_0$ описано первым слагаемым. В момент времени $t = t_0$ под действием *импульсной силы первого порядка* $a\delta(t-t_0)$ материальная точка мгновенно получает дополнительную скорость a, так как

$$\left(\frac{a}{2}\sigma_0(t-t_0)e^{-(t-t_0)}\sin 2(t-t_0)\right)'_{t=t_0} = a. ◀$$

Пример 18. Решить задачу Коши:

$$y'' + 2y' + 5y = b\delta_1(t-t_0),\ y(0) = y_0,\ y'(0) = y'_0. \qquad (1)$$

▶ Данная задача отличается от задачи Коши из примера 17 только тем, что импульсная сила первого порядка $a\delta(t-t_0)$ заменена в ней *импульсной силой второго порядка* $b\delta_1(t-t_0)$. Поэтому имеем другое операторное уравнение (b = const):

$$(p^2+2p+5)\,Y(p) = (p+2)y_0 + y'_0 + bpe^{-pt_0},$$

из которого находим изображение:

$$Y(p) = \frac{(p+2)y_0+y'_0+bpe^{-pt_0}}{p^2+2p+5} = \left(y_0 + bpe^{-pt_0}\right)\frac{p+1}{(p+1)^2+4} +$$

$$+\frac{y_0+y'_0+bpe^{-pt_0}}{(p+1)^2+4},$$

а затем и соответствующий ему оригинал:

$$y(t) = e^{-t}\left(y_0\cos 2t + \frac{y_0+y'_0}{2}\sin 2t\right) +$$

$$+\sigma_0(t-t_0)e^{-(t-t_0)}\left(b\cos 2(t-t_0) - \frac{b}{2}\sin 2(t-t_0)\right).$$

Здесь первое слагаемое представляет собой общее решение однородного уравнения, а второе состоит из двух частей, появившихся из-за воздействия импульсной силы второго порядка $b\delta_1(t-t_0)$. Первая из них описывает мгновенное смещение материальной точки на расстояние b в момент времени

$t = t_0$, а вторая – мгновенный скачок скорости на величину $-b$ в этот же момент $t = t_0$. ◂

Решение линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Пусть коэффициентами исходного линейного дифференциального уравнения будут многочлены относительно аргумента t и правая часть $f(t)$ является оригиналом. Тогда, использовав теоремы о дифференцировании оригинала и изображения (см. формулы (16.7) и (16.8)), получим соответствующее операторное уравнение, которое снова будет линейным дифференциальным уравнением (аргументом является p) порядка, равного высшей степени t в многочленах исходного уравнения относительно искомого изображения $Y(p)$. Таким образом, если порядок исходного уравнения n относительно $y(t)$, а высшая степень многочленов равна m, то операторное уравнение будет линейным дифференциальным уравнением порядка m относительно $Y(p)$. Если $m \ll n$, то решение уравнения более высокого порядка n сводится к решению уравнения более низкого порядка m и отысканию $y(t)$ по найденному изображению $Y(p)$. Но в общем случае использование этого метода предполагает значительные трудности.

Простейшим является случай *линейного дифференциального уравнения Эйлера*

$$\sum_{k=0}^{n} (a_k t + b_k) y^{(n-k)} = f(t), \tag{16.37}$$

где a_k, b_k – постоянные; $f(t)$ – оригинал. Это уравнение любого порядка n имеет соответствующее операторное уравнение, являющееся линейным дифференциальным первого порядка, решение которого всегда выражается через интегралы, что приводит к элементарным или специальным функциям для $Y(p)$. Если для $Y(p)$ удается найти оригинал $y(t)$, то он и является решением уравнения (16.37).

Замечание. Постоянные интегрирования операторного уравнения в общем случае и в случае уравнения Эйлера, когда имеется только одна постоянная интегрирования, легко находятся по начальным условиям для исходного уравнения с помощью теоремы о связи начального значения оригинала с конечным значением изображения (см. формулу (16.16)). ◂

Пример 19. Найти решение дифференциального уравнения

$$(t+1)y'' - (3t+4)y' + (2t+4)y = 0$$

при произвольных начальных условиях $y(0) = y_0$, $y'(0) = y'_0$, т.е. найти его общее решение.

▸ Составим операторное уравнение. Исходные соотношения: $y(t) \risingdotseq Y(p)$, $y'(t) \risingdotseq pY(p) - y_0$, $y''(t) \risingdotseq p^2 Y(p) - py_0 - y'_0$. Перепишем данное уравнение в виде $t(y'' - 3y' + 2y) + (y'' - 4y' + 4y) = 0$ и найдем изображения выражений в скобках:

$$y'' - 4y' + 4y \risingdotseq (p^2 - 4p + 4)\,Y(p) - (p-4)y_0 - y'_0\,,$$

$$y'' - 3y' + 2y \risingdotseq (p^2 - 3p + 2)\,Y(p) - (p-3)y_0 - y'_0\,.$$

Применяя к последнему операторному соотношению теорему о дифференцировании изображения (16.7), находим:

$$t(y'' - 3y' + 2y) \risingdotseq -\frac{d}{dp}((p^2 - 3p + 2)\,Y(p) - (p-3)y_0 - y'_0) =$$

$$= -(p^2 - 3p + 2)\,Y'(p) - (2p-3)\,Y(p) + y_0\,.$$

Следовательно, операторное уравнение имеет вид

$$(p^2 - 3p + 2)\,Y'(p) - (p^2 - 6p + 7)\,Y(p) = -y_0 p + 5y_0 - y'_0\,.$$

Общее решение линейного дифференциального уравнения первого порядка находим стандартным образом:

$$Y(p) = \frac{Ce^p}{(p-1)^2(p-2)} + \frac{y_0 p^2 + (y'_0 - 4y_0)p + y_0}{(p-1)^2(p-2)}\,.$$

Здесь C – произвольная постоянная интегрирования, значение которой вычисляется с помощью формулы (16.16), для данного примера имеющей вид $\lim\limits_{p \to +\infty} p\,Y(p) = y(0) = y_0$. Легко определяем, что последняя формула выполняется при $C = 0$. Найденное изображение $Y(p)$ разложимо в сумму простейших дробей:

$$Y(p) = \frac{y_0 p^2 + (y'_0 - 4y_0)p + y_0}{(p-1)^2(p-2)} = \frac{A_1}{p-1} + \frac{A_2}{(p-1)^2} + \frac{A_3}{p-2}\,.$$

Вычисляем значения A_1, A_2, A_3 и записываем оригинал:

$$Y(p) \risingdotseq y(t) = (2y'_0 - 3y_0)e^{2t} + (2y_0 - y'_0)e^t(t+2)\,.$$

Введем две произвольные постоянные C_1 и C_2 по формулам:

$$C_1 = 2y'_0 - 3y_0\,,\ C_2 = 2y_0 - y'_0\,.$$

Тогда найденное общее решение исходного уравнения запишется в виде

$$y(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^t(t+2)\,. \blacktriangleleft$$

Пример 20. Операторным методом решить задачу Коши:

$$ty'' + y' + ty = 0\,,\ y(0) = 1\,,\ y'(0) = 0\,.$$

▶ Опираясь на опыт решения предыдущего уравнения, легко находим операторное уравнение и его решение:

$$(p^2+1)Y'(p)+pY(p)=0\,,\ Y(p)=C/\sqrt{p^2+1}\,.$$

Постоянная интегрирования C определяется с помощью формулы (16.16):

$$\lim_{p\to+\infty} pY(p)=\lim_{p\to+\infty}\left(pC/\sqrt{p^2+1}\right)\doteqdot y(0)=1,\ C=1\,.$$

Окончательно имеем:

$$Y(p)\doteqdot y(t)=J_0(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n!)^2}\left(\frac{t}{2}\right)^{2n},$$

т.е. решение задачи Коши (см. прил. 2, п. 23). ◀

АЗ-16.6

С помощью операционного исчисления найти решение дифференциального уравнения.

1. $y''+3y'+2y=0$, $y(0)=1$, $y'(0)=2$. (*Ответ:* $y(t)=4e^{-t}-3e^{-2t}$.)

2. $y''-4y=t-1$, $y(0)=y'(0)=0$. (*Ответ:* $y(t)=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}t-\frac{1}{16}e^{2t}-\frac{3}{16}e^{-2t}$.)

3. $y''+y'=t^2+2t$, $y(0)=4$, $y'(0)=-2$. (*Ответ:* $y(t)=\frac{1}{3}t^3$.)

4. $y''-7y'+6y=\sin t$, $y(0)=y'(0)=0$. (*Ответ:* $y(t)=\frac{7}{74}\cos t+\frac{5}{74}\sin t-\frac{1}{10}e^{t}+\frac{1}{185}e^{6t}$.)

5. $3y'''+6y''+y'+2y=e^{-t}$, $y(0)=y'(0)=y''(0)=2$. (*Ответ:* $y(t)=\frac{1}{4}e^{-t}+\frac{7}{13}e^{-2t}+\frac{63}{52}\cos\frac{\sqrt{3}}{3}t+\frac{5\sqrt{3}}{52}\sin\frac{\sqrt{3}}{3}t$.)

6. $y'''+y''=0$, $y(0)=1$, $y'(0)=1$, $y''(0)=-2$. (*Ответ:* $y(t)=\frac{1}{2}\cos t-\frac{1}{2}\sin t+2t-3$.)

АЗ-16.7

С помощью операционного исчисления найти решение системы дифференциальных уравнений, удовлетворяющее указанным начальным условиям.

1. $\begin{cases} x' = x - y, \\ y' = x + y, \end{cases}$ $x(0) = 1$, $y(0) = 0$. (*Ответ:* $x = e^t \cos t$, $y = e^t \sin t$.)

2. $\begin{cases} x' = y - 7x, \\ y' = -2x - 5, \end{cases}$ $x(0) = 2$, $y(0) = 0$. (*Ответ:* $x = 2e^{-6t}(\cos t - \sin t)$, $y = -4e^{-6t} \sin t$.)

3. $\begin{cases} x' + 2x + 2y = 10e^{2t}, \\ y' - 2x + y = 7e^{2t}, \end{cases}$ $x(0) = 1$, $y(0) = 3$. (*Ответ:* $x = e^{2t}$, $y = 3e^{2t}$.)

4. $\begin{cases} x'' - 3x - 4y + 3 = 0, \\ y'' + x + y + 5 = 0, \end{cases}$ $x(0) = x'(0) = 0$, $y(0) = y'(0) = 0$. (*Ответ:* $x = 7t \operatorname{sh} t - 17 \operatorname{ch} t + 17$, $y = 12 \operatorname{ch} t - \frac{7}{2} t \operatorname{sh} t - 12$.)

5. $\begin{cases} x' = -x + y + z, \\ y' = x - y + z, \\ z' = x + y + z, \end{cases}$ $x(0) = 1$, $y(0) = 0$, $z(0) = 0$. (*Ответ:* $x = \frac{1}{3}e^{-t} + \frac{1}{6}e^{2t} + \frac{1}{2}e^{-2t}$, $y = \frac{1}{3}e^{-t} + \frac{1}{6}e^{2t} - \frac{1}{2}e^{-2t}$, $z = \frac{1}{3}e^{2t} - \frac{1}{3}e^{-t}$.)

6. $\begin{cases} x' = -x + y + z, \\ y' = x - y + z, \\ z' = x + y - z, \end{cases}$ $x(0) = 2$, $y(0) = 2$, $z(0) = -1$. (*Ответ:* $x = e^t + e^{-2t}$, $y = e^t + e^{-2t}$, $z = e^t - 2e^{-2t}$.)

АЗ-16.8

Методами операционного исчисления найти общее решение указанного дифференциального уравнения.

1. $y'' - 4y' + 3y = e^t(t^2 - 3t + 1)$. (*Ответ:* $y(t) = c_1e^t + c_2e^{3t} - \frac{5}{12}t^3e^t - \frac{9}{16}t^2e^t - \frac{11}{8}te^t$.)

2. $y''' - 3y' + 2y = (4t^2 + 4t - 10)e^{-t}$. (*Ответ:* $y(t) = c_1e^t + c_2te^t + c_3e^{-2t} + (t^2 + t - 1)e^{-t}$.)

3. $y^{(4)} + y^{(3)} = \cos t$. (*Ответ:* $y(t) = c_1 + c_2t + c_3t^2 + \frac{1}{2}(\cos t - \sin t)$.)

4. Ветвь, имеющая сопротивление R_3 (рис. 16.11), подключена к цепи. Используя правила Кирхгофа, составить систему дифференциальных уравнений и найти операторным методом силы переходных токов i_1, i_2, i_3, если известно, что $U = 30$ В, $R_1 = 10$ Ом, $R_2 = 5$ Ом, $L = 2$ Гн. (*Ответ:* $i_1(t) = 2{,}1 - 0{,}15e^{-6{,}25t}$, $i_2(t) = 1{,}8 + 0{,}2e^{-6{,}25t}$, $i_3(t) = 0{,}3 - 0{,}05\ e^{-6{,}25t}$.)

5. Найти решение интегрального уравнения $\int_0^t y(\tau)\sin(t - \tau)d\tau = \sin^2 t$. (*Ответ:* $y(t) = \frac{1}{2}(1 + 3\cos 2t)$.)

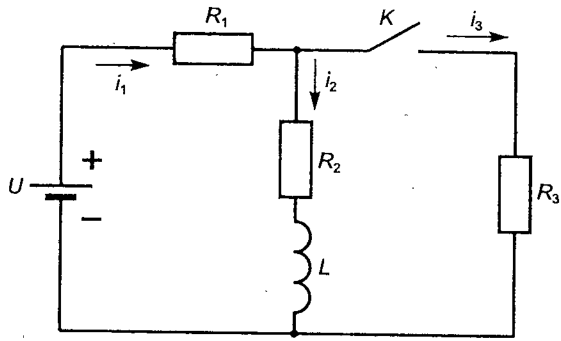


Рис. 16.11

6. Найти решение интегрального уравнения $y(t) = \sin 2t - \frac{8}{3}\int\limits_0^t y(\tau)\,\mathrm{sh}\,3(t-\tau)d\tau$. (*Ответ:* $y(t) = \frac{1}{5}(13\sin 2t - 16\,\mathrm{sh}\,t)$.)

7. Вычислить несобственный интеграл $\int\limits_0^{+\infty} xe^{-3x}\cos x dx$. (*Ответ:* $5/169$.)

8. Вычислить несобственный интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin\alpha x - \sin\beta x}{x\sqrt{x}}dx$, $\alpha,\ \beta > 0$. (*Ответ:* $\sqrt{2\pi}(\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta})$.)

9. Вычислить несобственный интеграл $\int\limits_0^{+\infty} x^2 e^{-\alpha x}dx$, $\alpha > 0$. (*Ответ:* $2/\alpha^3$.)

Самостоятельная работа

1. Операторным методом найти решение дифференциального уравнения $y'' + 2y' + y = \cos t$, если $y(0) = y'(0) = 0$. (*Ответ:* $y(t) = \frac{1}{2}\sin t - \frac{1}{2}t\sin t$.)

2. Операторным методом найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - 4y = e^{-t}$. (*Ответ:* $y(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{2t} + \frac{1}{12}e^{-t}$.)

3. Операторным методом найти решение системы уравнений $\begin{cases} x' = y - 4x, \\ y' = x + y, \end{cases}$ удовлетворяющее условиям $x(0) = 2$, $y(0) = 3$. (*Ответ:* $x = e^{-2t} + e^{-3t}$, $y = 2e^{-2t} + e^{-3t}$.)

16.4. ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ДОМАШНИЕ ЗАДАНИЯ К ГЛ.16

ИДЗ-16.1

1. По заданному оригиналу найти изображение по Лапласу:

$$f(t) = \begin{cases} 0 \text{ при } t < 0, \\ M_0 + M_1 t + M_2 t^2 + M_3 t^3 + \\ + e^{\alpha t}((At + B)\sin \omega t + (Ct + D)\cos \omega t) + \\ + Ee^{\alpha t}\sigma_0(t) + F\delta(t) + G\delta_1(t) \text{ при } t \geq 0. \end{cases}$$

Значения параметров α, ω, M_i $(i = 0, 1, 2, 3)$, A, B, C, D, E, F, G приведены в табл. 16.1.

Таблица 16.1

Номер варианта	α	ω	M_0	M_1	M_2	M_3	A	B	C	D	E	F	G
1.1	0	1	0	2	0	0	2	1	0	0	3	0	0
1.2	0	1	1	0	0	0	0	1	2	0	0	4	0
1.3	0	0	1	0	2	1	0	0	1	0	0	0	5
1.4	1	2	1	1	0	1	1	0	0	0	1	0	0
1.5	−2	1	2	1	0	1	0	2	0	1	0	2	0
1.6	0	2	0	0	−1	2	0	−1	1	0	0	0	3
1.7	1	1	2	1	−1	1	0	1	0	0	0	0	0
1.8	−1	0	3	−1	2	0	0	0	−1	0	0	−2	0
1.9	0	1	2	0	−1	0	1	2	0	1	0	0	0
1.10	1	2	0	0	2	0	1	−1	0	0	0	0	0
1.11	0	1	2	−1	1	2	0	1	0	2	0	0	0
1.12	2	0	1	0	0	1	0	0	2	1	0	3	0
1.13	−3	1	2	1	−1	1	0	2	0	0	0	0	0
1.14	0	2	0	0	0	0	1	0	0	2	0	0	5
1.15	1	3	0	0	2	0	−1	0	1	0	0	1	0
1.16	3	1	2	3	−1	1	0	2	0	−1	0	0	0
1.17	0	2	0	0	2	2	1	−2	0	1	0	0	0
1.18	1	0	3	1	1	1	1	0	2	0	0	0	0
1.19	−1	2	0	2	−1	1	2	0	0	1	0	0	0
1.20	2	1	1	1	1	1	2	0	0	0	0	0	0
1.21	0	3	0	0	2	0	1	−2	0	1	0	−1	2
1.22	0	1	1	0	0	−1	0	1	1	0	0	3	0
1.23	−2	0	2	0	1	0	0	0	1	2	4	0	0
1.24	1	2	2	1	−1	0	1	0	0	−1	2	0	1
1.25	0	0	0	2	0	−1	0	0	2	−1	0	1	0
1.26	−1	4	5	−3	0	0	0	1	0	0	2	2	0
1.27	1	0	3	0	0	5	2	0	0	0	0	0	4
1.28	2	0	0	0	3	0	0	0	2	−1	0	3	0
1.29	−5	3	1	0	0	2	0	−3	0	0	2	0	−1
1.30	2	0	0	2	0	−1	0	0	2	−1	0	1	0

2. Найти изображение функции

$$f(t) = \begin{cases} f_1(t) \text{ при } 0 \le t < t_1, \\ f_2(t) \text{ при } t_1 \le t < t_2, \\ 0 \quad \text{ при } t < 0 \text{ и } t \ge t_2. \end{cases}$$

Функции $f_1(t)$, $f_2(t)$ и числовые значения параметров t_1, t_2 приведены в табл. 16.2.

Таблица 16.2

Номер варианта	$f_1(t)$	$f_2(t)$	t_1	t_2
2.1	t	$2-t$	1	2
2.2	0	$\cos t$	$\pi/2$	π
2.3	t/π	$-t/\pi$	π	2π
2.4	$2t$	$-2(t-4)$	2	4
2.5	t	$\sin t$	$\pi/2$	π
2.6	3	-3	1	2
2.7	$2t$	-2π	1/2	1
2.8	$2t/\pi$	$2(\pi-t)/\pi$	$\pi/2$	π
2.9	$\cos t$	-1	π	2π
2.10	π	$-\pi$	π	2π
2.11	$2t$	$2(2-t)$	1	2
2.12	$\sin t$	$\cos t$	$\pi/2$	π
2.13	t	$-t$	1	2
2.14	0	$-\sin t$	$\pi/2$	π
2.15	t	$2\pi-t$	π	2π
2.16	$(1/\pi)t$	1	π	2π
2.17	$\sin t$	$-\cos t$	$\pi/2$	π
2.18	t	$4-t$	2	4
2.19	1	$\sin t$	$\pi/2$	π
2.20	t	$t-2$	1	2
2.21	$\cos t$	$\sin t$	$\pi/2$	π
2.22	t	$\pi-t$	$\pi/2$	π
2.23	$t/2$	$-t/2$	2	4
2.24	$-\sin t$	-1	$\pi/2$	π
2.25	$2t$	$2(2\pi-t)$	π	2π
2.26	$1-2t/\pi$	$-3+2t/\pi$	π	2π
2.27	1	$t/2$	2	3
2.28	$t-2$	3	5	6
2.29	$\exp(-2(t-1))$	1	1	2
2.30	$\exp t$	-1	1	2

3. По заданному изображению

$$\frac{Ap^2 + Bp + C}{(p+a)(p^2+bp+c)}$$

найти оригинал. Значения коэффициентов A, B, C, a, b, c приведены в табл. 16.3.

Таблица 16.3

Номер варианта	A	B	C	a	b	c
3.1	3	−9	16	−2	−6	13
3.2	2	16	9	−1	4	4
3.3	1	15	20	−2	2	10
3.4	9	−21	−6	1	−5	6
3.5	0	−6	12	1	−4	13
3.6	−4	−3	−3	0	2	1
3.7	0	3	13	−1	2	5
3.8	2	−10	24	−2	−2	−3
3.9	1	3	−6	1	6	13
3.10	0	−4	1	0	−2	1
3.11	1	13	3	−3	2	2
3.12	2	5	5	2	2	−3
3.13	0	0	13	2	−2	10
3.14	2	−13	39	1	−4	4
3.15	1	−6	8	2	−2	4
3.16	4	0	1	1	1	0
3.17	1	9	44	−1	4	13
3.18	0	−4	5	−1	0	−1
3.19	1	−3	12	1	−2	5
3.20	7	12	−7	3	1	−2
3.21	2	−7	11	1	−2	2
3.22	3	2	11	3	−2	1
3.23	1	3	2	−1	1	1
3.24	3	8	17	−2	2	1
3.25	5	5	−58	−4	2	−3
3.26	1	5	9	10	4	20
3.27	2	4	8	8	−4	5
3.28	3	3	7	6	4	−5
3.29	4	2	6	4	6	−7
3.30	5	1	5	2	−8	25

Решение типового варианта

1. По заданному оригиналу $f(t)$ найти изображение по Лапласу $F(p)$. Общий вид функции $f(t)$ взять из табл. 16.1, вариант 1.30.

▸ Коэффициенты $\alpha = 2, \omega = 0, M_0 = 0, M_1 = 2, M_2 = 0, M_3 = -1, E = G = 0, F = 1, A = B = 0, C = 2, D = -1$ берем из последней строки табл. 16.1. Подставляя их в выражение для функции $f(t)$, получаем:

$$f(t) = 2t - t^3 + e^{2t}(2t - 1) + \Delta(t).$$

Для отыскания изображения $F(p)$ находим оригиналы всех функций-слагаемых, используя прил. 2:

$$t \risingdotseq \frac{1}{p^2},\ t^3 \risingdotseq \frac{3!}{p^4},\ te^{2t} \risingdotseq \frac{1}{(p-2)^2},\ e^{2t} \risingdotseq \frac{1}{p-2},\ \delta(t) \risingdotseq 1.$$

На основании свойства линейности получаем:

$$F(p) = \frac{2}{p^2} - \frac{6}{p^4} + \frac{2}{(p-2)^2} - \frac{1}{p-2} + 1. ◂$$

2. Найти изображение функции

$$f(t) = \begin{cases} 2t & \text{при } 0 \le t < \pi, \\ 2(2\pi - t) & \text{при } \pi \le t < 2\pi, \\ 0 & \text{при } t < 0 \text{ и } t \ge 2\pi. \end{cases}$$

▸ С помощью единичной функции Хевисайда представим функцию $f(t)$ в следующем виде:

$$f(t) = (\sigma_0(t) - \sigma_0(t-\pi)) \cdot 2t + (\sigma_0(t-\pi) - \sigma_0(t-2\pi)) \times$$
$$\times 2(2\pi - t) = 2\sigma_0(t)t - 2\sigma_0(t-\pi)t + 2\sigma_0(t-\pi)(2\pi - t) -$$
$$-2\sigma_0(t-2\pi)(2\pi - t) = 2\sigma_0(t)t - 4\sigma_0(t-\pi)(t-\pi) +$$
$$+2\sigma_0(t-2\pi)(t-2\pi).$$

Так как $\sigma_0(t) \risingdotseq \frac{1}{p}$ и $\sigma_0(t)t \risingdotseq \frac{1}{p^2}$, то на основании теоремы запаздывания имеем:

$$\sigma_0(t-\pi)(t-\pi) \risingdotseq e^{-\pi p}\frac{1}{p^2},\ \sigma_0(t-2\pi)(t-2\pi) \risingdotseq e^{-2\pi p}\frac{1}{p^2}.$$

Следовательно,

$$f(t) \risingdotseq 2\frac{1}{p^2} - 4e^{-\pi p}\frac{1}{p^2} + 2e^{-2\pi p}\frac{1}{p^2} = \frac{2}{p^2}(1 - 2e^{-\pi p} + e^{-2\pi p}) =$$
$$= \frac{2}{p^2}(1 - e^{-\pi p})^2. ◂$$

3. Найти оригинал функции $f(t)$ по заданному изображению

$$F(p) = \frac{5p^2+5p-58}{(p-4)(p^2+2p-3)}.$$

▶ Разложим знаменатель дроби на линейные множители и представим данную дробь в виде суммы простейших рациональных дробей:

$$\frac{5p^2+5p-58}{(p-4)(p^2+2p-3)} = \frac{5p^2+5p-58}{(p-4)(p-1)(p+3)} =$$

$$= \frac{A}{p-4}+\frac{B}{p-1}+\frac{C}{p+3}.$$

Приведя сумму дробей в правой части равенства к общему знаменателю, приравняем числители дробей:

$$5p^2+5p-58 = A(p-1)(p+3)+B(p-4)(p+3)+$$
$$+C(p-4)(p-1).$$

Подставив в левую и правую части последнего соотношения корни знаменателя, получим систему уравнений для определения коэффициентов A, B, C:

$$\begin{array}{r|lll} p=4 & 42=21A, & A=2, \\ p=1 & -48=-12B, & B=4, \\ p=-3 & -28=-28C, & C=1. \end{array}$$

Следовательно,

$$F(p) = \frac{2}{p-4}+\frac{4}{p-1}+\frac{1}{p+3}.$$

Воспользовавшись прил. 2, найдем оригинал:

$$f(t) = 2e^{4t}+4e^{t}+e^{-3t}. ◀$$

ИДЗ-16.2

1. Решить операторным методом линейное дифференциальное уравнение

$$\alpha\ddot{x}+\beta\dot{x}+\gamma x = f(t),\ x(t_0) = A,\ \dot{x}(t_0) = B.$$

Функцию $f(t)$ и значения коэффициентов α, β, γ, t_0, $x(t_0)$, $\dot{x}(t_0)$ взять из табл. 16.4.

Таблица 16.4

Номер варианта	α	β	γ	$f(t)$	t_0	$x(t_0)$	$\dot{x}(t_0)$
1.1	0	1	1	$\cos t$	0	0,5	−1
1.2	0	1	2	$5\cos t$	0	2	−3
1.3	0	1	−2	$2e^{2t}$	0	1	−2
1.4	0	1	2	$\sin t$	0	0	−4
1.5	1	−2	2	1	0	0	0
1.6	1	−6	9	2	0	1	2
1.7	1	0	−9	$2-t$	0	0	1
1.8	1	0	1	0	π	1	0
1.9	1	1	0	$-2t$	2	2	−2
1.10	1	1	−6	6	0	−1	5
1.11	1	0	9	$18e^{3t}$	0	0	0
1.12	1	0	1	$-2\sin t$	π/2	0	1
1.13	1	0	−4	$4t$	0	1	0
1.14	1	6	5	$12e^t$	0	0	0
1.15	1	6	13	$4e^{-3t}$	0	0	0
1.16	1	0	1	$e^{-t}+2$	0	0	0
1.17	1	2	1	$2e^{1-t}$	1	1	−1
1.18	1	1	0	$2t$	1	1	−1
1.19	1	−1	0	$-2t$	2	8	6
1.20	1	−6	5	$3e^{2t}$	0	0	0
1.21	1	4	4	$9e^t$	0	0	0
1.22	1	2	1	$1+\cos 2t$	0	0	0
1.23	1	−2	1	$1-\sin t$	0	0	0
1.24	1	−1	0	te^t	0	0	−1
1.25	1	−1	0	t^2	0	0	−1
1.26	2	8	−10	t^2e^t	0	1	1
1.27	2	0	8	$2\cos^2 t$	0	−1	2
1.28	1	−2	1	$1-e^t$	0	1	2
1.29	3	6	−9	$2e^t-e^{-3t}$	0	3	−1
1.30	1	−4	5	$e^{2t}\cos t$	π/2	−1	1

2. Решить операторным методом систему линейных дифференциальных уравнений

$$\left.\begin{aligned} a_1\dot{x}+b_1\dot{y}+c_1x+d_1y &= f_1(t), \quad x(0) = A,\\ a_2\dot{x}+b_2\dot{y}+c_2x+d_2y &= f_2(t), \quad y(0) = B. \end{aligned}\right\}$$

Функции $f_1(t)$, $f_2(t)$ и значения a_k, b_k, c_k, d_k, $(k = 1,\ 2)$, A, B, $x(0)$, $y(0)$ взять из табл. 16.5.

Таблица 16.5

Номер вари-анта	a_1	b_1	c_1	d_1	$f_1(t)$	a_2	b_2	c_2	d_2	$f_2(t)$	$x(0)$	$y(0)$
2.1	1	0	0	1	0	0	1	−2	−2	0	1	1
2.2	0	1	−1	−2	$\cos t$	1	0	2	1	$\sin t$	0	0
2.3	1	0	−2	−4	$\cos t$	0	1	1	2	$\sin t$	0	0
2.4	1	0	7	−1	0	0	1	2	5	0	1	1
2.5	1	1	0	−1	e^t	2	1	0	2	0	0	0
2.6	1	0	−1	1	$(3/2)t^2$	0	1	4	2	$4t+1$	0	0
2.7	1	0	0	1	0	0	1	1	0	0	1	−1
2.8	1	0	1	1	e^t	0	1	−1	1	e^t	1	1
2.9	1	2	2	0	$\cos t$	1	1	−1	0	0	0	0
2.10	1	1	0	−1	0	2	1	0	2	$\cos t$	0	0
2.11	3	1	2	0	1	1	4	0	3	0	0	0
2.12	11	0	2	2	$10e^{2t}$	0	1	−2	1	$7e^{2t}$	1	3
2.13	1	0	1	−3	0	0	1	−1	−1	e^t	1	1
2.14	1	0	1	−3	0	0	1	−1	−1	e^t	0	0
2.15	1	0	−1	−1	e^t	0	1	−3	1	0	0	0
2.16	1	0	−1	−1	e^t	0	1	−3	1	0	1	1
2.17	1	0	5	2	0	0	1	−1	7	0	1	1
2.18	1	2	2	0	0	1	1	−1	0	e^t	0	0
2.19	1	0	1	−3	0	0	1	−1	−1	e^{-t}	1	1
2.20	1	0	−1	−2	t	0	1	−2	−1	t	4	2
2.21	1	0	2	4	$4t+1$	0	1	1	−1	$(3/2)t^2$	0	0
2.22	1	0	−1	−1	e^{-t}	0	1	1	−3	0	0	1
2.23	1	0	−2	−2	0	0	1	1	0	0	1	1
2.24	1	0	0	1	0	0	1	1	0	0	−1	1
2.25	4	1	3	0	0	1	3	0	2	1	0	0
2.26	1	5	−1	0	$\sin t$	2	1	−1	0	e^t	0	−1
2.27	2	4	−2	−1	e^t	0	−2	1	0	$\cos t$	1	0
2.28	3	3	−3	0	$2t^2$	3	0	2	1	$\sin t$	0	−2
2.29	4	2	−4	−2	$t-1$	0	−1	0	2	$1-t$	2	0
2.30	5	1	−5	3	$\cos 2t$	4	0	−2	0	e^{2t}	0	3

Решение типового варианта

1. Решить операторным методом дифференциальное уравнение $\ddot{x} - \dot{x} = t^2$ при заданных начальных условиях $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 1$.

▸ Из прил. 1, 2 находим изображения по Лапласу:

$$\dot{x}(t) \risingdotseq pX(p)\,,\ \ddot{x}(t) \risingdotseq p^2 X(p) - 1\,,\ X(p) \risingdotseq x(t)\,;\ t^2 \risingdotseq 2/p^3\,.$$

Получаем операторное уравнение $(p^2 - p)X(p) = 1 + 2/p^3$. Решаем его относительно $X(p)$:

$$X(p) = \frac{p^3 + 2}{p^4(p-1)}\,.$$

Раскладываем полученную рациональную дробь в сумму простейших дробей с неопределенными коэффициентами:

$$\frac{p^3+2}{p^4(p-1)} = \frac{A_1}{p^4} + \frac{A_2}{p^3} + \frac{A_3}{p^2} + \frac{A_4}{p} + \frac{B}{p-1}\,.$$

Приведем сумму дробей в правой части равенства к общему знаменателю и приравняем числители дробей:

$$p^3 + 2 = A_1(p-1) + A_2 p(p-1) + A_3 p^2(p-1) +$$

$$+ A_4 p^3(p-1) + Bp^4\,.$$

Подставив в левую и правую части последнего соотношения корни знаменателя $p_1 = 0$, $p_2 = 1$ и приравняв в обеих частях коэффициенты при степенях p^4, p^3, p^2, получим систему линейных уравнений. Решив ее, найдем значения искомых коэффициентов:

$$\begin{array}{l|ll}
p = 0 & 2 = -A_1, & A_1 = -2, \\
p = 1 & 3 = B, & B = 3, \\
p^4 & 0 = A_4 + B, & A_4 = -3, \\
p^3 & 1 = A_3 - A_4, & A_3 = -2, \\
p^2 & 0 = A_2 - A_3, & A_2 = A_3 = -2.
\end{array}$$

Подставив вычисленные коэффициенты в выражение для $X(p)$, получим:

$$X(p) = -\frac{2}{p^4} - \frac{2}{p^3} - \frac{2}{p^2} - \frac{3}{p} + \frac{3}{p-1}\,.$$

Используя прил. 1 и 2, находим оригинал:

$$x(t) = 3e^t - 3 - 2t - t^2 - t^3/3\,.$$

Это и есть искомое решение дифференциального уравнения. ◂

2. Решить операторным методом систему дифференциальных уравнений

$$\left.\begin{aligned} 4\dot{x}+\dot{y}+3x &= 0,\\ \dot{x}+3\dot{y}+2y &= 1 \end{aligned}\right\}$$

при заданных начальных условиях $x(0) = 0$, $y(0) = 0$.

▶ По прил. 1 находим изображения по Лапласу:

$$\dot{x}(t) \doteqdot pX(p)\,,\ \dot{y}(t) \doteqdot pY(p)\,,$$

где $X(p) \doteqdot x(t)$; $Y(p) \doteqdot y(t)$; $1 \doteqdot 1/p$. Получаем систему операторных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} (4p+3)X+pY &= 0,\\ pX+(3p+2)Y &= 1/p. \end{aligned}\right\}$$

Решив ее относительно X и Y, будем иметь:

$$X(p) = \frac{-1}{11p^2+17p+6}\,,\quad Y(p) = \frac{4p+3}{p(11p^2+17p+6)}\,.$$

Разложим знаменатели дробей на простые множители и представим рациональные дроби в выражениях для $X(p)$, $Y(p)$ в виде суммы простейших дробей с неопределенными коэффициентами:

$$X(p) = \frac{1}{11(p+6/11)(p+1)} = \frac{A_1}{p+6/11}+\frac{B_1}{p+1}\,,$$

$$Y(p) = \frac{1}{11p(p+6/11)(p+1)} = \frac{A_2}{p+6/11}+\frac{B_2}{p+1}+\frac{C_2}{p}\,.$$

Вычислим неопределенные коэффициенты:

$$\left.\begin{aligned} X(p) &= \frac{1}{5}\left(\frac{1}{p+1}-\frac{1}{p+6/11}\right),\\ Y(p) &= \frac{1}{6p}+\frac{1}{5(p+1)}-\frac{11}{6(p+6/11)}. \end{aligned}\right\}$$

Использовав прил. 1 и 2, найдем оригиналы:

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{5}\left(e^{-t} - e^{-\frac{6}{11}t}\right), \\ y(t) &= \frac{1}{6} + \frac{1}{5}e^{-t} - \frac{11}{6}e^{-\frac{6}{11}t}. \end{aligned}\right\}$$

Это и есть искомое решение системы. ◀

3. Найти общее решение уравнения

$$x''' - 6x'' + 11x' - 6x = 12t^2 e^{3t} - e^{2t}.$$

▶ Перейдем к изображениям:

$$x' \risingdotseq pX - x(0),\ x'' \risingdotseq p^2 X - px(0) - x'(0),$$

$$x''' \risingdotseq p^3 X - p^2 x(0) - px'(0) - x''(0),$$

$$12t^2 e^{3t} - e^{2t} \risingdotseq \frac{24}{(p-3)^3} - \frac{1}{p-2}.$$

Запишем операторное уравнение:

$$p^3 X - p^2 x(0) - px'(0) - x''(0) - 6p^2 X + 6px(0) + 6x'(0) +$$

$$+ 11pX - 11x(0) - 6X = \frac{24}{(p-3)^3} - \frac{1}{p-2},$$

или после простых преобразований

$$X(p^3 - 6p^2 + 11p - 6) = p^2 x(0) + px'(0) + x''(0) - 6px(0) -$$

$$- 6x'(0) + 11x(0) + \frac{-p^3 + 9p^2 - 3p - 21}{(p-3)^3(p-2)}.$$

Отсюда, воспользовавшись разложением $p^3 - 6p^2 + 11p - 6 = (p-1)(p-2)(p-3)$, получаем:

$$X(p) = \frac{p^2 x(0) + px'(0) + x''(0) - 6px(0) - 6x'(0) + 11x(0)}{(p-1)(p-2)(p-3)} +$$

$$+ \frac{-p^3 + 9p^2 - 3p - 21}{(p-3)^4(p-2)^2(p-1)}.$$

Полагаем $X(p) = X_1(p) + X_2(p)$, где

$$X_1(p) = \frac{p^2 x(0) + px'(0) + x''(0) - 6px(0) - 6x'(0) + 11x(0)}{(p-1)(p-2)(p-3)},$$

$$X_2(p) = \frac{-p^3 + 9p^2 - 3p - 21}{(p-3)^4 (p-2)^2 (p-1)}.$$

Разложим $X_1(p)$ и $X_2(p)$ на элементарные дроби. Имеем:

$$X_1(p) = \frac{M}{p-1} + \frac{N}{p-2} + \frac{K}{p-3},$$

$$X_2(p) = \frac{A}{(p-3)^4} + \frac{B}{(p-3)^3} + \frac{C}{(p-3)^2} + \frac{D}{p-3} + \frac{E}{(p-2)^2} +$$

$$+ \frac{F}{p-2} + \frac{G}{p-1},$$

$$-p^3 + 9p^2 - 3p - 21 \equiv A(p-2)^2(p-1) +$$

$$+ B(p-3)(p-2)^2(p-1) + C(p-3)^2(p-2)^2(p-1) +$$

$$+ D(p-3)^3(p-2)^2(p-1) + E(p-3)^4(p-1) +$$

$$+ F(p-3)^4(p-2)(p-1) + G(p-3)^4(p-2)^2.$$

Из этого тождества находим: $A = 12$, $B = -18$, $C = 21$, $D = -23$, $E = 1$, $F = 24$, $G = -1$. Тогда

$$\frac{-p^3 + 9p^2 - 3p - 21}{(p-3)^4 (p-2)^2 (p-1)} = \frac{12}{(p-3)^4} - \frac{18}{(p-3)^3} + \frac{21}{(p-3)^2} - \frac{23}{p-3} +$$

$$+ \frac{1}{(p-2)^2} + \frac{24}{p-2} - \frac{1}{p-1}.$$

Следовательно,

$$X(p) = \frac{M}{p-1} + \frac{N}{p-2} + \frac{K}{p-3} + \frac{12}{(p-3)^4} - \frac{18}{(p-3)^3} + \frac{21}{(p-3)^2} -$$

$$- \frac{23}{p-3} + \frac{1}{(p-2)^2} + \frac{24}{p-2} - \frac{1}{p-1}.$$

Введя обозначения $C_1 = M - 1$, $C_2 = N + 24$, $C_3 = K - 23$, получим:

$$X(p) = \frac{C_1}{p-1} + \frac{C_2}{p-2} + \frac{C_3}{p-3} + \frac{12}{(p-3)^4} - \frac{18}{(p-3)^3} +$$

$$+ \frac{21}{(p-3)^2} + \frac{1}{(p-2)^2}.$$

Переходим от изображения $X(p)$ к оригиналу $x(t)$ по формулам:

$$\frac{1}{p-1} \doteqdot e^t, \ \frac{1}{p-2} \doteqdot e^{2t}, \ \frac{1}{p-3} \doteqdot e^{3t},$$

$$\frac{1}{(p-2)^2} \doteqdot te^{2t}, \ \frac{12}{(p-3)^4} \doteqdot \frac{12t^3}{3!}e^{3t} = 2t^3e^{3t},$$

$$\frac{-18}{(p-3)^3} \doteqdot -\frac{18t^2}{2!}e^{3t} = -9t^2e^{3t}, \ \frac{21}{(p-3)^2} \doteqdot \frac{21t}{1!}e^{3t} = 21te^{3t}.$$

Общее решение дифференциального уравнения будет иметь вид

$$x(t) = C_1e^t + C_2e^{2t} + C_3e^{3t} + te^{2t} + (2t^3 - 9t^2 + 21t)e^{3t}. \blacktriangleleft$$

4. Найти частное решение системы

$$\left.\begin{aligned} x'' + x' + y'' - y &= e^t, \\ x' + 2x - y' + y &= e^{-t} \end{aligned}\right\}$$

при начальных условиях $x(0) = y(0) = y'(0) = 0$, $x'(0) = 1$.

▶ Переходим к изображениям:

$$x(t) \doteqdot X(p), \ x'(t) \doteqdot pX(p), \ x''(t) \doteqdot p^2X(p) - 1, \ e^t \doteqdot \frac{1}{p-1},$$

$$y(t) \doteqdot Y(p), \ y'(t) \doteqdot pY(p), \ y''(t) \doteqdot p^2Y(p), \ e^{-t} \doteqdot \frac{1}{p+1}.$$

Запишем систему операторных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} p^2X - 1 + pX + p^2Y - Y &= \frac{1}{p-1}, \\ pX + 2X - pY + Y &= \frac{1}{p+1}, \end{aligned}\right\}$$

или

$$\left.\begin{aligned} p(p+1)X+(p^2-1)Y &= \frac{1}{p-1}, \\ (p+2)X-(p-1)Y &= \frac{1}{p+1}. \end{aligned}\right\}$$

Решив эту систему, получим:

$$X(p) = \frac{2p-1}{2(p-1)(p+1)^2}, \quad Y(p) = \frac{3p}{2(p^2-1)^2}.$$

Разложим на простейшие дроби выражение для $X(p)$:

$$\frac{2p-1}{(p-1)(p+1)^2} = \frac{A}{p-1} + \frac{B}{(p+1)^2} + \frac{C}{p+1},$$

$$2p-1 = A(p+1)^2 + B(p-1) + C(p^2-1),$$

$$A = \frac{1}{4},\ B = \frac{3}{2},\ C = -\frac{1}{4};$$

$$\left.\begin{aligned} X(p) &= \frac{1}{8}\frac{1}{p-1} + \frac{3}{4}\frac{1}{(p+1)^2} - \frac{1}{8}\frac{1}{p+1} = \frac{1}{4}\frac{1}{p^2-1} + \frac{3}{4}\frac{1}{(p+1)^2}, \\ Y(p) &= \frac{3p}{2(p^2-1)^2}. \end{aligned}\right\}$$

Переходим к оригиналам:

$$\frac{1}{p+1} \risingdotseq e^{-t},\ \frac{1}{p^2-1} \risingdotseq \operatorname{sh} t.$$

По теореме о дифференцировании изображений находим:

$$\left(\frac{1}{p+1}\right)' \risingdotseq -te^{-t} \text{ и } \left(\frac{1}{p^2-1}\right)' \risingdotseq -t \operatorname{sh} t,$$

или

$$\frac{1}{(p+1)^2} \risingdotseq te^{-t} \text{ и } \frac{2p}{(p^2-1)^2} \risingdotseq t \operatorname{sh} t.$$

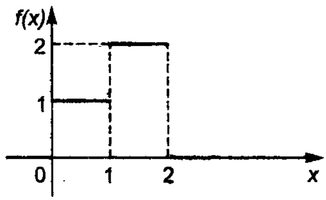
Частное решение системы будет иметь вид

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{4}\operatorname{sh} t + \frac{3}{4}te^{-t}, \\ y(t) &= \frac{3}{4}t \operatorname{sh} t. \end{aligned}\right\} \blacktriangleleft$$

ИДЗ-16.3

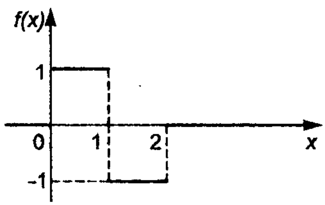
1. Найти изображение по графику оригинала.

1.1.



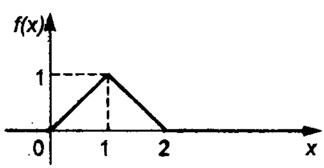
(*Ответ:* $F(p) = \dfrac{1+e^{-p}-2e^{-2p}}{p}$.)

1.2.



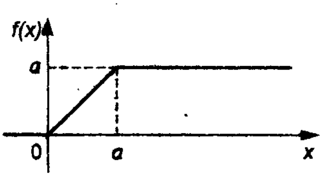
(*Ответ:* $F(p) = \dfrac{(1-e^{-p})^2}{p}$.)

1.3.



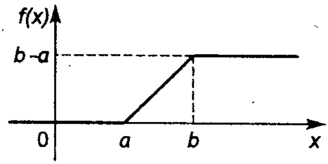
(*Ответ:* $F(p) = \dfrac{(1-e^{-p})^2}{p^2}$.)

1.4.



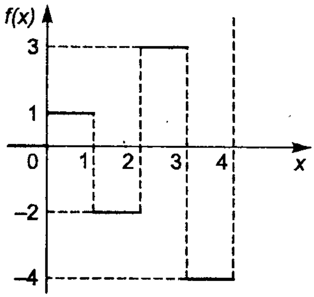
(*Ответ:* $F(p) = \dfrac{1-e^{-ap}}{p^2}$.)

1.5.



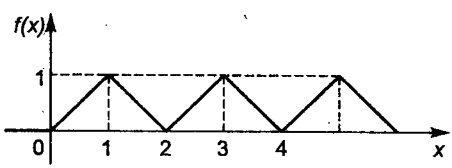
(*Ответ:* $F(p) = \dfrac{e^{-ap} - e^{-bp}}{p^2}$.)

1.6.



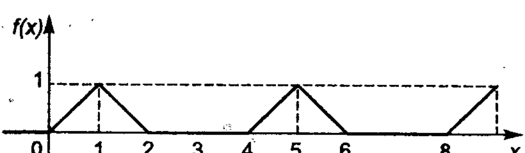
(*Ответ:* $F(p) = \dfrac{1}{p}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^k(2k+1)}{e^{kp}}$.)

1.7.



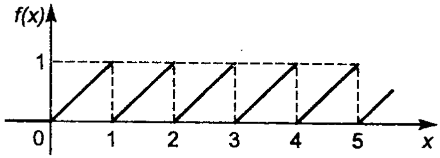
(*Ответ:* $F(p) = \dfrac{1 - e^{-p}}{p^2(1 + e^{-p})}$.)

1.8.



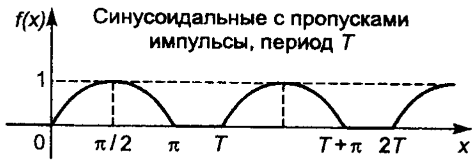
(*Ответ:* $F(p) = \dfrac{(1 - e^{-p})^2}{p^2(1 - e^{-4p})}$.)

1.9.



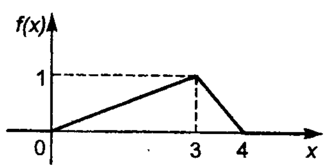
(*Ответ:* $F(p) = \dfrac{2}{p^2} + \dfrac{1}{p(1 - e^{-p/2})}$.)

1.10.



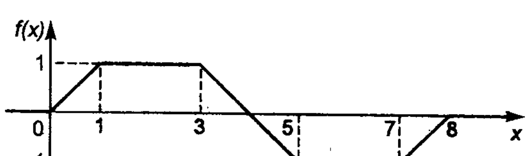
(*Ответ:* $F(p) = \dfrac{1}{p^2 + 1} \dfrac{1 + e^{-\pi p}}{1 - e^{-Tp}}$.)

1.11.



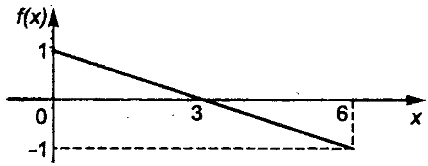
(*Ответ:* $F(p) = \dfrac{3}{p^2}\left(\dfrac{1 - e^{-3p}}{3} + \dfrac{e^{-4p} - e^{-3p}}{1}\right)$.)

1.12.



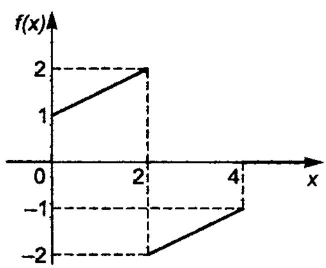
(*Ответ:* $F(p) = \dfrac{1}{p^2}(1 - e^{-p})(1 - e^{-3p})(1 - e^{-4p})$.)

1.13.



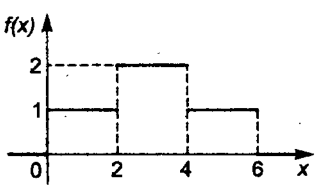
(*Ответ:* $F(p) = \frac{1}{p}(1 + e^{-6p}) - \frac{1}{3p}(1 - e^{-6p})$.)

1.14.



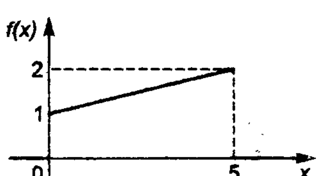
(*Ответ:* $F(p) = \frac{1}{2p^2}(1 - e^{-4p}) + \frac{1}{p}(1 - 4e^{-2p} + e^{-4p})$.)

1.15.



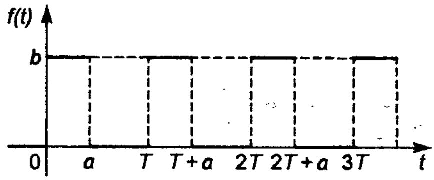
(*Ответ:* $F(p) = \frac{1}{p}(1 + e^{-2p})(1 - e^{-4p})$.)

1.16.



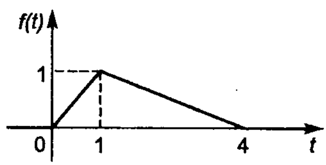
(*Ответ:* $F(p) = \frac{1}{5p^2}(1 - e^{-5p}) + \frac{1}{p}(1 - 2e^{-5p})$.)

1.17.



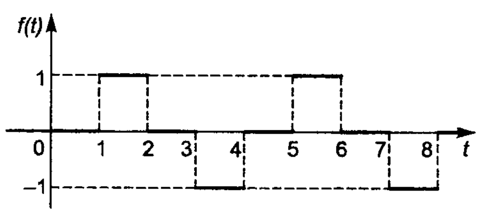
(*Ответ:* $F(p) = \dfrac{b(1-e^{-ap})}{p(1-e^{-pT})}$.)

1.18.



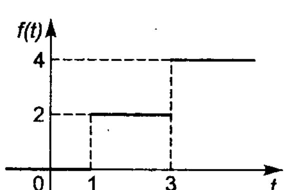
(*Ответ:* $F(p) = \dfrac{1-e^{-p}}{p^2} + \dfrac{e^{-4p}-e^{-p}}{3p^2}$.)

1.19.



(*Ответ:* $F(p) = \dfrac{1-e^{-p}}{2p\,\mathrm{ch}\,p}$.)

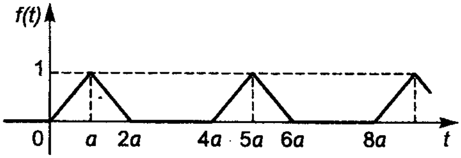
1.20.



(*Ответ:*

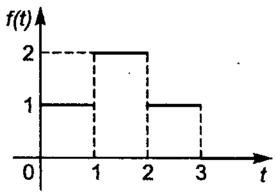
$F(p) = \dfrac{2(1+e^{-2p})}{pe^{p}}$.)

1.21.



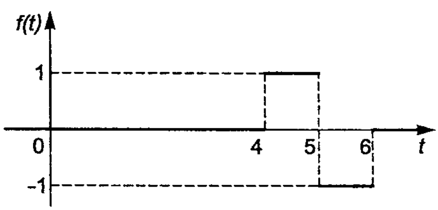
(*Ответ:* $F(p) = \dfrac{(1-e^{-ap})^2}{ap^2(1-e^{-4ap})}$.)

1.22.



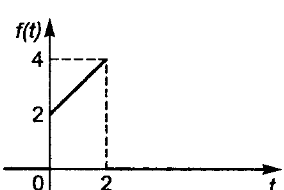
(*Ответ:* $F(p) = \dfrac{1}{p}(1+e^{-p})(1-e^{-2p})$.)

1.23.



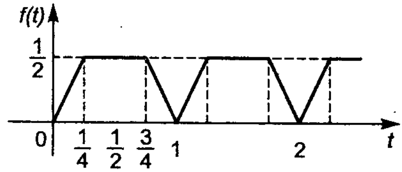
(*Ответ:* $F(p) = \dfrac{1}{p}(e^{-2p}-e^{-3p})^2$.)

1.24.



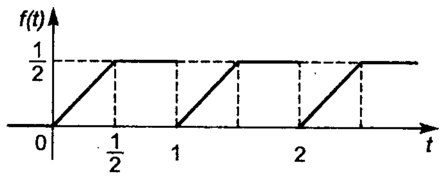
(*Ответ:* $F(p) = \dfrac{1}{p^2}(1-e^{-2p}) + \dfrac{2}{p}(1-2e^{-2p})$.)

1.25.



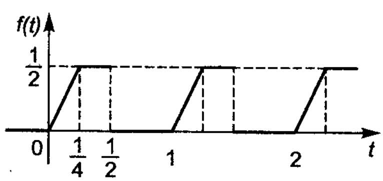
(*Ответ:* $F(p) = \dfrac{2(1-e^{-p/4})(1-e^{-3p/4})}{p^2(1-e^{-p})}$.)

1.26.



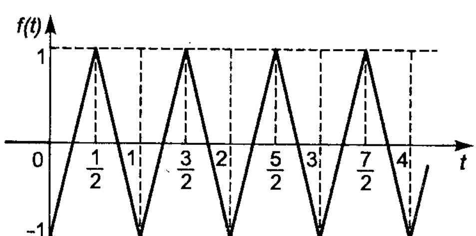
(*Ответ:* $F(p) = \dfrac{2-2e^{-p/2}-pe^{-p}}{2p^2(1-e^{-p})}$.)

1.27.



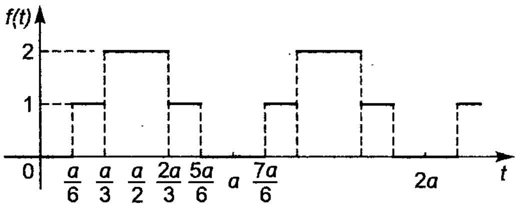
(*Ответ:* $F(p) = \dfrac{8-8e^{-p/4}-2pe^{-p/2}}{p^2(1-e^{-p})}$.)

1.28.



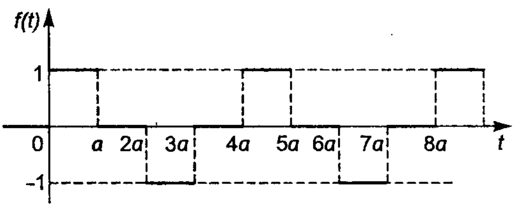
(*Ответ:* $F(p) = \dfrac{4(1-e^{-p/2})}{p^2(1+e^{-p/2})}$.)

1.29.



(*Ответ:* $F(p) = \dfrac{1}{p}\operatorname{ch}(ap/12)/\operatorname{ch}(ap/4)$.)

1.30.



(*Ответ:* $F(p) = \dfrac{1-e^{-ap}}{p(1+e^{-2ap})}$.)

2. Вычислить несобственный интеграл с помощью предельных теорем.

2.1. $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}\,dt$, $a>0$, $b>0$. (*Ответ:* $\ln\dfrac{b}{a}$.)

2.2. $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-at}\sin bt}{t}\,dt$, $a>0$, $b>0$. (*Ответ:* $\operatorname{arctg}\dfrac{b}{a}$.)

2.3. $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-at}-e^{-\beta t}}{t}\sin mt\,dt$, $a>0$, $\beta>0$, $m>0$. (*Ответ:* $\operatorname{arctg}\dfrac{\beta}{m}-\operatorname{arctg}\dfrac{\alpha}{m}$.)

2.4. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos(t/3)\sin t}{t}dt$. (*Ответ:* $\frac{\pi}{2}$.)

2.5. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin at \sin bt}{t}dt$, $a>0$, $b>0$. (*Ответ:* $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{a+b}{a-b}\right|$.)

2.6. $\int\limits_0^{+\infty} e^{-ax}\sin bx dx$, $a>0$, $b>0$. (*Ответ:* $\frac{b}{a^2+b^2}$.)

2.7. $\int\limits_0^{+\infty} e^{-4x}\sin 3x\cos 2x dx$. (*Ответ:* $\frac{63}{697}$.)

2.8. $\int\limits_0^{+\infty} e^{-ax}\cos bx dx$. (*Ответ:* $\frac{a}{a^2+b^2}$.)

2.9. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-ax}\sin x}{x}dx$. (*Ответ:* $\operatorname{arctg}\frac{1}{a}$.)

2.10. $\int\limits_0^{+\infty} e^{-3x}\cos 3x\cos 4x dx$. (*Ответ:* $\frac{51}{290}$.)

Вычислить несобственный интеграл, используя формулу Парсеваля.

2.11. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos\alpha x-\cos\beta x}{x}dx$. (*Ответ:* $\ln\frac{\beta}{\alpha}$.)

2.12. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin\alpha x-\alpha\sin x}{x}dx$. (*Ответ:* $-\alpha\ln\alpha$.)

2.13. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^4 x}{x^4}dx$. (*Ответ:* $\frac{\pi}{3}$.)

2.14. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin ax \sin^2 x}{x^3} dx$, $0 < a < 2$. (*Ответ:* $\frac{\pi a}{8}(4 - a)$.)

2.15. $\int\limits_0^{+\infty} \sin x^2 dx$. (*Ответ:* $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.)

2.16. $\int\limits_0^{+\infty} \cos x^2 dx$. (*Ответ:* $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.)

2.17. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x - \sin x}{x^3} dx$. (*Ответ:* $\frac{\pi}{4}$.)

2.18. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^3 x}{x^2} dx$. (*Ответ:* $\frac{3}{16}\ln 3$.)

2.19. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} \sin^3 bx}{x} dx$. (*Ответ:* $\frac{1}{4}\left(3\operatorname{arctg} \frac{b}{a} - \operatorname{arctg} \frac{3b}{a}\right)$.)

2.20. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^3 x}{x^3} dx$. (*Ответ:* $\frac{3}{8}\pi$.)

2.21. $\int\limits_0^{+\infty} \left(\frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\right)^2 dx$. (*Ответ:* $\ln\frac{(2a)^{2a}(2b)^{2b}}{(a+b)^{2(a+b)}}$.)

2.22. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x \cos x}{x} dx$. (*Ответ:* $\frac{\pi}{4}$.)

2.23. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^3}{(x+a)^5} dx$, $a \neq 0$. (*Ответ:* $\frac{1}{4a}$.)

2.24. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-ax^2} - e^{-bx^2}}{x^2} dx$. (*Ответ:* $\sqrt{\pi}(\sqrt{b} - \sqrt{a})$. Указание. Сделать замену $x^2 = t$.)

2.25. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x \cos 2x}{x} dx$. (*Ответ:* 0.)

2.26. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-ax^2}}{xe^{x^2}} dx$. (*Ответ:* $\frac{1}{2}\ln(a+1)$. Указание. Сделать замену $x^2 = t$.)

Вычислить несобственный интеграл, предварительно найдя его изображение с помощью интеграла Лапласа.

2.27. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{1 - \cos at}{t^2} dt$. (*Ответ:* $\frac{\pi}{2} a$.)

2.28. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{t \sin at}{t^2 + b^2} dt$. (*Ответ:* $\frac{\pi}{2} e^{-ab}$.)

2.29. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos at}{t^2 + b^2} dt$. (*Ответ:* $\frac{\pi}{2b} e^{-ab}$.)

2.30. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin at}{t(t^2 + b^2)} dt$. (*Ответ:* $\frac{\pi}{2b^2}(1 - e^{-ab})$.)

Решение типового варианта

1. Найти изображение функции, заданной графически (рис. 16.12).

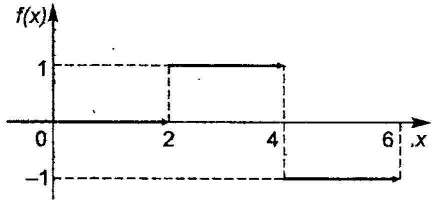


Рис. 16.12

▸ Как видно из графика функции, приведенного на рис. 16.12,

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 2, \\ 1 & \text{при } 2 \le x < 4, \\ -1 & \text{при } 4 \le x < 6, \\ 0 & \text{при } x \ge 6. \end{cases}$$

Следовательно, преобразование Лапласа оригинала $f(x)$ имеет вид

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-px} f(x)dx = \int_2^4 e^{-px}dx - \int_4^6 e^{-px}dx =$$

$$= -\frac{1}{p}e^{-px}\Big|_2^4 + \frac{1}{p}e^{-px}\Big|_4^6 = -\frac{1}{p}e^{-4p} + \frac{1}{p}e^{-2p} + -\frac{1}{p}e^{-6p} - \frac{1}{p}e^{-4p} =$$

$$= \frac{1}{p}(e^{-2p} - 2e^{-4p} + e^{-6p}) = \frac{(e^{-p} - e^{-3p})^2}{p}. \blacktriangleleft$$

2. Пользуясь предельными теоремами, вычислить несобственный интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$.

▸ Воспользовавшись формулой $\int_0^{+\infty} \frac{f(x)}{x}dx = \int_0^{+\infty} F(p)dp$, с учетом того, что $\sin x \risingdotseq \frac{1}{p^2+1}$, получим:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^{+\infty} \frac{dp}{p^2+1} = \lim_{\beta \to \infty} \int_0^{\beta} \frac{dp}{p^2+1} = \lim_{\beta \to \infty} \operatorname{arctg} p \Big|_0^{\beta} =$$

$$= \lim_{\beta \to \infty} \operatorname{arctg} \beta = \frac{\pi}{2}. ◀$$

3. Найти изображение $F(p)$ оригинала $f(t)$ с периодом $T = 2$, если $f(t)$ задан графически (рис. 16.13).

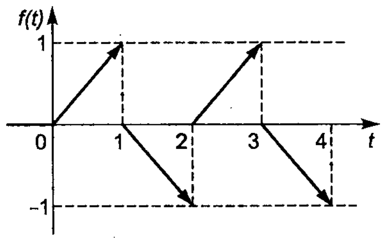


Рис. 16.13

▶ Оригинал $f(t)$ можно аналитически изобразить на интервале-периоде следующим образом:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } -\infty < t < 0, \\ t & \text{при } 0 \le t < 1, \\ 1 - t & \text{при } 1 \le t < 2. \end{cases}$$

Поэтому изображение данного периодического оригинала в соответствии с п. 6 прил. 1 найдем по формуле

$$F(p) = \frac{1}{1 - e^{-pT}} \int_0^T f(t) e^{-pt} dt =$$

$$= \frac{1}{1 - e^{-2p}} \left(\int_0^1 t e^{-pt} dt + \int_1^2 (1 - t) e^{-pt} dt \right).$$

Последние интегралы вычислим с помощью формулы интегрирования по частям:

$$\int_0^1 t e^{-pt} dt = -\frac{1}{p}\left(t e^{-pt} + \frac{1}{p} e^{-pt} \right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{p^2}(1 - e^{-p}) - \frac{1}{p} e^{-p},$$

$$\int_1^2 (1-t)e^{-pt}dt = -\frac{1}{p}\left((1-t)e^{-pt} - \frac{1}{p}e^{-pt}\right)\Bigg|_1^2 =$$

$$= \frac{1}{p}e^{-2p} + \frac{1}{p^2}e^{-2p} - \frac{1}{p^2}e^{-p}.$$

Подстановка найденных интегралов в выражение для $F(p)$ приводит к ответу:

$$F(p) = \frac{1}{1-e^{-2p}}\left(\frac{1}{p^2}(1-2e^{-p}+e^{-2p}) - \frac{1}{p}(e^{-p}-e^{-2p})\right) =$$

$$= \frac{1}{1-e^{-2p}}\left(\frac{1}{p^2}(1-e^{-p})^2 - \frac{1}{p}e^{-p}(1-e^{-p})\right) =$$

$$= \frac{1}{1+e^{-p}}\left(\frac{1-e^{-p}}{p^2} - \frac{e^{-p}}{p}\right). \blacktriangleleft$$

4. Вычислить несобственный интеграл, предварительно найдя его изображение с помощью интеграла Лапласа и приняв за переменную интегрирования параметр a:

$$f(a) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin at}{t(t^2+4)}dt.$$

$\blacktriangleright$ Так как $\int\limits_0^{+\infty} e^{-pa}\sin at\,da = \frac{t}{t^2+p^2}$, то изображение данного несобственного интеграла по переменной a можно представить в следующем виде:

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pa}\left(\int_0^{+\infty}\frac{\sin at}{t(t^2+4)}dt\right)da =$$

$$= \int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{t(t^2+4)}\int_0^{+\infty} e^{-pa}\sin at\,da\right)dt =$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t^2+4)(t^2+p^2)} = \frac{1}{p^2-4}\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{t^2+4} - \frac{1}{t^2+p^2}\right)dt =$$

$$= \frac{\pi}{8}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+2}\right).$$

Найденному изображению соответствует оригинал

$$f(a) = \frac{\pi}{8}(1 - e^{-2a}). ◄$$

16.5. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ К ГЛ. 16

Найти изображение оригинала.

1. $t^2 \sin 2t$. (*Ответ:* $(12p^2-16)/(p^2+4)^3$.)

2. $t\cos(t/2)$. (*Ответ:* $(16p^2-4)/(4p^2+1)^2$.)

3. $(t^2/2)\operatorname{sh} t$. (*Ответ:* $(3p^2+1)/(p^2-1)^3$.)

4. $te^{-2t}\sin 3t$. (*Ответ:* $(6p+12)/((p+2)^2+9)^2$.

5. $(t^2/2)e^t\cos t$. (*Ответ:* $(p^3-3p+2)/(p^2-2p+2)^3$.)

6. $\int_0^t \frac{1-e^{-x}}{x}dx$. (*Ответ:* $\frac{1}{p}\ln\left(1+\frac{1}{p}\right)$.)

7. $\int_0^t \frac{\operatorname{sh} x}{x}dx$. (*Ответ:* $\frac{1}{2p}\ln\frac{p+1}{p-1}$.)

8. $\int_0^t \frac{\operatorname{ch} x - 1}{x^2}dx$. (*Ответ:* $\frac{1}{2p}\ln\frac{p+1}{p-1} + \ln\frac{\sqrt{p^2-1}}{p}$.)

Найти оригинал указанного изображения.

9. $p/((p^2+1)(p^2+2p+2))$. (*Ответ:* $(1/5)(\cos t + 2\sin t - e^{-t}(\cos t + 3\sin t))$.)

10. $(p^2-1)/(p(p^2+4)^2)$. (*Ответ:* $(1/16)(\cos 2t + 5t\sin 2t - 1)$.)

11. $(p^2+p+1)/((p-1)^3(p^2+1))$. (*Ответ:* $(1/4)((3t^2-1)e^t+$
$+\sin t+\cos t)$.)

12. $p/(p^4-1)$. (*Ответ:* $(1/2)(\text{ch } t-\cos t)$.)

13. $(p(p^4-1))^{-1}$. (*Ответ:* $(1/2)(\text{ch } t+\cos t-2)$.)

14. $((p-1)(p^2+1))^{-1}$. (*Ответ:* $(1/2)(e^t-\sin t-\cos t)$.)

15. $p((p-1)(p^2+1))^{-1}$. (*Ответ:* $(1/2)(e^t+\sin t-\cos t)$.)

16. $((p+1)(p^2+2p+2))^{-1}$. (*Ответ:* $e^{-t}(1-\cos t)$.)

Решить задачу, используя методы операционного исчисления.

17. Найти частное решение дифференциального уравнения при заданных начальных условиях: $x''-9x=\text{sh } t$, $x_0=-1$, $x'_0=3$ при $t=0$. (*Ответ*: $x=(25/24)\text{sh } 3t-\text{ch } 3t-(1/8)\text{sh } t$.)

18. Найти общее решение дифференциального уравнения $x''+9x=\cos 3t$. (*Ответ*: $x=C_1\cos 3t+C_2\sin 3t+$
$+(1/6)t\sin 3t$.)

19. Найти частное решение системы дифференциальных уравнений при заданных начальных условиях:

$$\left.\begin{aligned} x''+y' &= \text{sh } t-\sin t-t,\\ y''+x' &= \text{ch } t-\cos t,\end{aligned}\right\} x_0=0,\ x'_0=2,\ y_0=1,\ y'_0=0$$

при $t=0$. (*Ответ*: $x=\text{sh } t+t$, $y=\cos t-t^2/2$.)

20. Найти общее решение системы дифференциальных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} x''-y' &= 1,\\ y''-x' &= 0.\end{aligned}\right\} \left(\textit{Ответ:}\ \begin{aligned} x &= C_1+C_2\text{sh } t+C_4(\text{ch } t-1),\\ y &= C_1+C_2\text{ch } t+C_3+C_4\text{sh } t-t.\end{aligned}\right)$$

21. Найти общее решение дифференциального уравнения Эйлера:

а) $(1-2t)x''+2x'+(2t-3)x=0$;

б) $tx''-(2t+1)x'+(t+1)x=0$.

(*Ответ*: а) $x=C_1e^t+C_2te^{-t}$; б) $x=C_1t^2e^t+C_2e^t$.)

22. Решить интегральное уравнение:

а) $\int\limits_0^t \operatorname{ch}(t-\tau)\cdot x(\tau)d\tau = \operatorname{ch} t - \cos t$;

б) $\int\limits_0^t \operatorname{ch}(t-\tau)\cdot x(\tau)d\tau = t\cos t$;

в) $x(t) = e^t + \int\limits_0^t e^{t-\tau}x(\tau)d\tau$;

г) $x(t) = 1 - \cos t + \int\limits_0^t \sin(t-\tau)x(\tau)d\tau$.

(*Ответ*: а) $x(t) = 2\sin t$; б) $x(t) = 2\cos t - 1$; в) $x(t) = e^{2t}$; г) $x(t) = t^2/2$.)

23. Вычислить несобственный интеграл:

а) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}\cos cx}{x}dx$, $a>0$, $b>0$;

б) $\int\limits_0^{+\infty} xe^{-ax}\cos bx dx$, $a>0$;

в) $\int\limits_0^{+\infty} \cos(ax^2)dx$;

г) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x\sin ax}{x^2+b^2}dx$;

д) $\int\limits_0^{+\infty} e^{-ax^2}dx$, $a>0$;

е) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{\sqrt{x}}dx$, $a>0$, $b>0$;

ж) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sin ax - \sin bx}{x\sqrt{x}} dx$, $a > 0$, $b > 0$.

(*Ответ*: а) $\ln(\sqrt{b^2 + c^2} / a)$; б) $(a^2 - b^2)/(a^2 + b^2)^2$;

в) $(1/2)\sqrt{\pi/(2a)}$; г) $(\pi/2)e^{-ab}$; д) $(\pi/2)/\sqrt{a}$;

е) $\sqrt{\pi/(ab)}(\sqrt{b} - \sqrt{a})$; ж) $\sqrt{2\pi}(\sqrt{a} - \sqrt{b})$.)

17. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ УСТОЙЧИВОСТИ

17.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Работа многих механизмов, электротехнических устройств, электромагнитных цепей и их звеньев, различных приборов для автоматического регулирования описывается системами дифференциальных уравнений. Рассмотрим следующую систему:

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, x_2, \dots, x_n, t), \ i = \overline{1, n}. \tag{17.1}$$

Предположим, что правые части системы (17.1), т.е. функции X_i, непрерывны в некоторой открытой области D, которая может совпадать со всем $(n+1)$-мерным пространством переменных $t, x_1, x_2, \dots, x_n$. Кроме того, будем считать, что для системы (17.1) в области D выполнены условия существования и единственности решения

$$x_i = x_i(t, \overset{0}{x}_1, \overset{0}{x}_2, \dots, \overset{0}{x}_n), \ i = \overline{1, n}, \tag{17.2}$$

удовлетворяющего начальным условиям

$$x_i(t_0, \overset{0}{x}_1, \overset{0}{x}_2, \dots, \overset{0}{x}_n) = \overset{0}{x}_i, \tag{17.3}$$

где t_0, $\overset{0}{x}_i$ – некоторые числа из области D. Предположим, что решение (17.2) определено для любого значения t; в этом случае оно называется *продолжаемым*.

Правые части системы (17.1) можно рассматривать как проекции переменного вектора скорости $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$, а величину t – как время. Тогда система (17.1) описывает закон движения начальной точки $M_0(\overset{0}{x}_1, \overset{0}{x}_2, \dots, \overset{0}{x}_n)$ n-мерного фазового пространства по траектории $x_i = x_i(t, \overset{0}{x}_1, \overset{0}{x}_2, \dots, \overset{0}{x}_n)$, $i = \overline{1, n}$.

Запишем систему (17.1) в векторной форме:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = X(\mathbf{x}, t),$$

где $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}$ – вектор-столбец размерности $n \times 1$;

$$X = \begin{pmatrix} X_1(x, t) \\ X_2(x, t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ X_n(x, t) \end{pmatrix} \tag{17.4}$$

является вектором скорости.

Решением системы (17.1) называется векторная функция

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n(t) \end{pmatrix} = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))^T,$$

где T – знак транспонирования.

Через $\|x\|$ обозначим *норму вектора*, которую будем считать совпадающей с *евклидовой длиной вектора*:

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}. \tag{17.5}$$

17.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ. УРАВНЕНИЯ ВОЗМУЩЕННОГО ДВИЖЕНИЯ

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dy}{dt} = Y(y,t). \tag{17.6}$$

Выделим некоторое решение $y = f(t)$ системы (17.6) и назовем его *невозмущенным движением*.

Движение $y = f(t)$ называется *устойчивым по Ляпунову*, еслн для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что нз неравенства $\|y(t_0) - f(t_0)\| < \delta$ следует неравенство $\|y(t) - f(t)\| < \varepsilon$ при любых $t \geq t_0$. Здесь через $y = y(t)$ обозначеио любое другое решение системы (17.6), определяемое начальными условиями $y(t_0) = y_0$ (рис. 17.1).

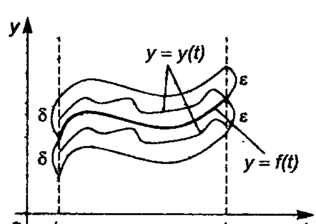


Рис. 17.1

Движение $y = f(t)$ называется *неустойчивым*, если существует $\varepsilon > 0$ и решение $y = y(t)$ такие, что для любого $\delta > 0$ при $\|y(t_0) - f(t_0)\| < \delta$ найдется $T \geq t_0$ такое, что $\|y(T) - f(T)\| \geq \varepsilon$ (рис. 17.2).

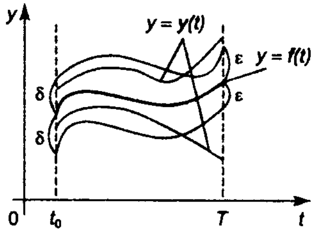


Рис. 17.2

Движение $y = f(t)$ называется *асимптотически устойчивым по Ляпунову*, если оно устойчиво по Ляпунову и существует такое положительное число h, что при $\|y(t_0) - f(t_0)\| < h$ будем иметь (рис. 17.3):

$$\lim_{t \to \infty} \|y(t) - f(t)\| = 0 . \tag{17.7}$$

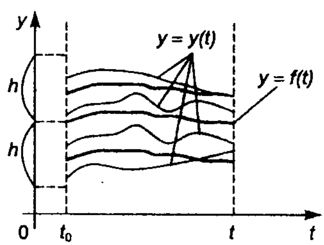


Рис. 17.3

Если движение $y = f(t)$ устойчиво по Ляпунову и соотношение (17.7) справедливо для решений $y(t)$, определяемых любыми начальными условиями, то говорят, что движение $y = f(t)$ *асимптотически устойчиво при любых начальных данных* (или *асимптотически устойчиво в целом*; рис. 17.4).

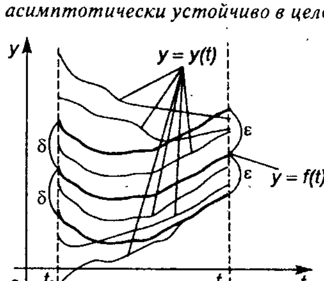


Рис. 17.4

Произведем в системе (17.6) замену искомой функции y функцией x по формуле $x = y - f(t)$. Новая система будет иметь вид

$$\frac{dx}{dt} = Y(x+f(t),\,t) - Y(f(t),\,t).$$

Введя обозначение $X(x,t) = Y(x+f(t),\,t) - Y(f(t),\,t)$, получим систему

$$\frac{dx}{dt} = X(x,t), \tag{17.8}$$

где $X(\mathbf{0},\,t) = \mathbf{0}$ при $t \geq t_0$.

Система (17.8) определяет *дифференциальные уравнения возмущенного движения*. Движение $y = f(t)$ переходит при рассматриваемой замене переменных в состояние равновесия $x = \mathbf{0}$ новой системы, а задача устойчивости движения $y = f(t)$ – *в задачу устойчивости нулевого решения* $x = \mathbf{0}$ *системы* (17.8).

Решение $x = \mathbf{0}$ системы (17.8) называется *устойчивым по Ляпунову*, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать число $\delta > 0$ такое, что из неравенства $\|x(t_0)\| < \delta$ при любых $t \geq t_0$ следует неравенство $\|x(t)\| < \varepsilon$. Если, кроме того, существует $h > 0$ такое, что всякое решение $x = x(t)$, начальные данные которого подчиняются условию $\|x(t_0)\| < h$, обладает свойством $\lim\limits_{t \to +\infty} \|x(t)\| = 0$, то нулевое решение называется *асимптотически устойчивым по Ляпунову*. Область $\|x(t)\| < h$ называется *областью притяжения нулевого решения*. Если эта область охватывает все фазовое пространство $h = +\infty$, то нулевое решение системы (17.8) называется *асимптотически устойчивым в целом*.

На рис. 17.5, 17.6 дается геометрическая интерпретация данных определений устойчивости в случае двумерных векторов $x = x(x_1(t),\,x_2(t))$, т.е. описывается поведение траекторий движения $x = x(t)$ на фазовой плоскости.

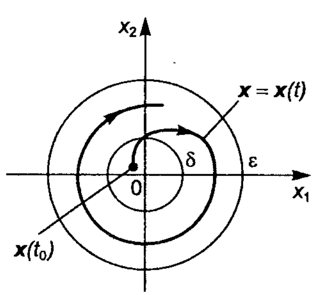


Рис. 17.5

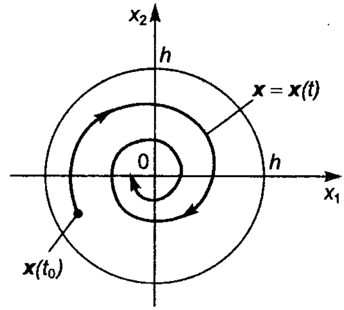


Рис. 17.6

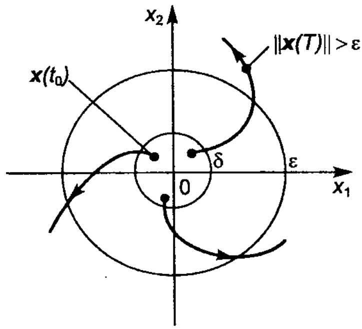


Рис. 17.7

Геометрическая интерпретация неустойчивости нулевого решения системы (17.8) в двумерном случае дана на рис. 17.7.

17.3. ФУНКЦИИ ЛЯПУНОВА И ТЕОРЕМЫ ЛЯПУНОВА ОБ УСТОЙЧИВОСТИ И НЕУСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим функцию $v(x_1, x_2, ..., x_n)$, которая определена в фазовом пространстве переменных $x_1, x_2, ..., x_n$, непрерывна, имеет непрерывные частные производные в некоторой области D_0, включающей начало координат, и удовлетворяет условию $v(0, 0, ..., 0) = 0$.

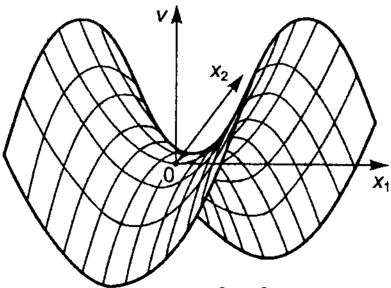
Функция $v(x_1, x_2, ..., x_n) = v(\boldsymbol{x})$, где $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$, называется *определенно положительной* или *положительно определенной в области* D_0, если $v(\boldsymbol{x}) > 0$ для любых $\boldsymbol{x} \in D_0$, $\boldsymbol{x} \neq 0$. Если же $v(\boldsymbol{x}) < 0$ для любых $\boldsymbol{x} \in D_0$, $\boldsymbol{x} \neq 0$, то функция $v(\boldsymbol{x})$ называется *определенно отрицательной* или *отрицательно определенной*. В обоих случаях $v(\boldsymbol{x})$ называется также *знакоопределенной*.

Если же для любых $\boldsymbol{x} \in D_0$ $v(\boldsymbol{x}) \geq 0$ или $v(\boldsymbol{x}) \leq 0$, то функция v называется *знакопостоянной*, причем в первом случае она *знакоположительная*, а во втором – *знакоотрицательная*.

Если в области D_0 функция $v(x)$ принимает как положительные, так и отрицательные значения, то в этом случае $v(\boldsymbol{x})$ называется *знакопеременной функцией*.

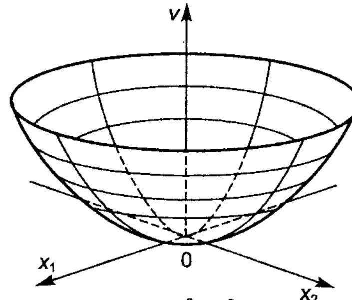
Функция $v = x_1^2 - x_2^2$ – знакопеременная в пространстве переменных x_1, x_2, а $v = x_1^2 + x_2^2$ – определенно положительная; функция $v = (x_1 - x_2)^2$ –

знакоположительная в этом пространстве, так как $v = 0$ при $x_1 = x_2$ (см. рис. 17.8–17.10).



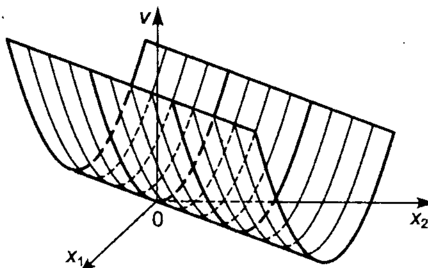
$v = x_1^2 - x_2^2$

Рис. 17.8



$v = x_1^2 + x_2^2$

Рис. 17.9



$v = (x_1 - x_2)^2$

Рис. 17.10

Очень часто в качестве функций Ляпунова (см. определение на с. 96) для дифференциальных систем берут квадратичные формы, поэтому укажем признаки знакоопределенности квадратичных форм.

Рассмотрим квадратичную форму

$$v = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j , \tag{17.9}$$

где

$$a_{ij} = a_{ji}, \quad i, j = \overline{1, n}. \tag{17.10}$$

Матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

коэффициентов квадратичной формы (17.9) является симметрической, т.е. $A = A^T$, что следует из условий (17.10). Рассмотрим ее диагональные определители:

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1k} & a_{2k} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix}, \quad k = \overline{1,n}. \tag{17.11}$$

Теорема 1 (критерий Сильвестра). *Для того чтобы квадратичная форма (17.9), (17.10) была определенно положительной, необходимо и достаточно выполнения условий* $\Delta_k > 0$, $k = \overline{1,\ n}$. *Для того чтобы квадратичная форма (17.9), (17.10) была определенно отрицательной, необходимо и достаточно выполнения условий* $(-1)^k\ \Delta_k > 0$, $k = \overline{1,\ n}$.

Рассмотрим *автономную* (правые части системы не зависят от времени t) *систему дифференциальных уравнений*

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}), \tag{17.12}$$

где $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ – вектор-столбец размерности $n \times 1$; $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}) = (X_1(\boldsymbol{x}), X_2(\boldsymbol{x}), \dots, X_n(\boldsymbol{x}))^T$ – вектор-функция размерности $n \times 1$; $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$.

Предположим, что правые части системы (17.12) непрерывны и удовлетворяют условиям существования и единственности решения в некоторой области D_0 фазового пространства, включающей точку $O\,(0, 0, \dots, 0)$ вместе с некоторой окрестностью. Условие $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$ означает, что точка O – положение равновесия системы (17.12).

Полной производной функции $v(\boldsymbol{x})$ в силу системы (17.12) будем называть производную

$$\dot{v} = \left.\frac{dv}{dt}\right|_{(17.12)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_i} X_i(\boldsymbol{x}) = \mathbf{grad}\ \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x});$$

$\mathbf{grad}\ \boldsymbol{v}$ направлен по нормали к поверхности уровня $v = \mathrm{const}$ функции $v(\boldsymbol{x})$, а вектор $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x})$ – по касательной к траектории $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t)$.

Знакоопределенная в окрестности точки O функция $v(x)$ называется *функцией Ляпунова для системы (17.12),* если ее полная производная $\dot v = \left.\frac{dv}{dt}\right|_{(17.12)}$ является знакоопределенной, знакопостоянной или тождественно равной нулю в этой окрестности.

Теорема 2 (Ляпунова об устойчивости). *Если для системы (17.12) существует в области D_0 знакоопределенная функция $v(x)$, полная производная которой по времени $\dot v$, вычисленная в силу системы (17.12), является знакопостоянной функцией, знак которой противоположен знаку функции $v(x)$, или $\dot v \equiv 0$, то положение равновесия устойчиво по Ляпунову.*

Теорема 3 (Ляпунова об асимптотической устойчивости). *Если существует знакоопределенная функция $v(x)$, полная производная которой по времени, найденная в силу системы (17.12), будет также знакоопределенной со знаком, противоположным знаку $v(x)$, то положение равновесия асимптотически устойчиво.*

Теорема 4 (первая теорема Ляпунова о неустойчивости). *Если в окрестности начала координат O существует функция Ляпунова $v(x)$ такая, что ее полная производная $\dot v = \left.\frac{dv}{dt}\right|_{(17.12)}$ является знакоопределенной функцией в окрестности O того же знака, что и $v(x)$, то нулевое решение системы (17.12) неустойчиво.*

Теорема 5 (вторая теорема Ляпунова о неустойчивости). *Если существует функция v такая, что ее производная по времени имеет вид $\dot v = \frac{dv}{dt} = \lambda v + w$, где $\lambda = \text{const} > 0$, а функция w тождественно равна нулю или знакопостоянна и если в последнем случае функция v не является в любой окрестности точки O знакопостоянной, причем знак ее противоположен знаку w, то нулевое решение системы (17.12) неустойчиво.*

Пример 1. Исследовать **на** устойчивость при различных значениях a, b, c, d нулевое решение системы

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -ay - bx^{2n+1} \quad \text{при целых } m,\ n, \\ \frac{dy}{dt} &= cx - dy^{2m+1} \quad \text{при } m \ge 0,\ n \ge 0. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

▸ Выберем функцию Ляпуиова вида $v = cx^2 + ay^2$. Легко находим, что

$$\left.\frac{dv}{dt}\right|_{(1)} = -2(bcx^{2n+2} + ady^{2m+2}).$$

Исследуем правую часть последнего равенства.

1. Пусть $a > 0$, $c > 0$ или $a < 0$, $c < 0$, тогда $ac > 0$. Если при этом $b > 0$, $d > 0$, то будут выполнены все условия теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости и нулевое решение (1) асимптотически устойчиво.

2. Пусть $b = d = 0$, $ac > 0$, $cx^2 + ay^2 = \text{const}$. Все условия теоремы Ляпунова об устойчивости выполнены, т.е. нулевое решение (1) устойчиво.

3. Пусть $ac < 0$, $bd < 0$, sign bc = sign ad (sign – знак числа) или $ac > 0$, $b < 0$, $d < 0$. Тогда выполнены все условия первой теоремы Ляпунова о неустойчивости, и нулевое решение (1) неустойчиво. ◄

17.4. ЛИНЕЙНЫЕ ОДНОРОДНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ И УСТОЙЧИВОСТЬ ИХ РЕШЕНИЙ

Рассмотрим линейное однородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + a_2 x^{(n-2)} + \ldots + a_n x = 0. \tag{17.13}$$

Составим характеристическое уравнение:

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \ldots + a_n = 0. \tag{17.14}$$

Определим корни уравнения (17.14) и запишем фундаментальную систему решений для уравнения (17.13): $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Тогда его общее решение имеет вид

$$x = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n. \tag{17.15}$$

Произвольные постоянные $c_1, c_2, \ldots, c_n$ определим по начальным условиям:

$$x\big|_{t=t_0} = x_0,\ x'\big|_{t=t_0} = x'_0,\ \ldots,\ x^{(n-1)}\big|_{t=t_0} = x_0^{(n-1)}.$$

Данная процедура стандартная: составляется система n линейных уравнений относительно c_i, включающая уравнение (17.15) и еще $n-1$ уравнений, полученных из выражения (17.15) почленным дифференцированием $n-1$ раз с последующей заменой $x, x', x'', \ldots, x^{(n-1)}$ на $x_0, x'_0, x''_0, \ldots, x_0^{(n-1)}$, взятые из начальных условий. В результате найдем: $c_i^0 = c_i(x_0, x'_0, \ldots, x_0^{(n-1)})$, $i = \overline{1,n}$. Получим частное решение

$$x = c_1^0 x_1 + c_2^0 x_2 + \ldots + c_n^0 x_n. \tag{17.16}$$

Фундаментальная система решений находится в зависимости от корней характеристического уравнения (17.14).

Простому действительному корню λ соответствует одно решение

$$e^{\lambda t}, \tag{17.17}$$

k-кратному действительному корню λ – k линейно независимых решений:

$$e^{\lambda t},\ te^{\lambda t},\ \ldots,\ t^{k-1}e^{\lambda t}. \tag{17.18}$$

Простой паре комплексно-сопряженных корней $\lambda = \alpha \pm \beta i$ соответствуют два решения:

$$e^{\alpha t}\cos\beta t,\ e^{\alpha t}\sin\beta t, \tag{17.19}$$

k-кратной паре комплексно-сопряженных корней $\alpha \pm i\beta = \lambda$ – $2k$ линейно независимых решений:

$$e^{\alpha t}\cos\beta t,\ e^{\alpha t}\sin\beta t,\ te^{\alpha t}\cos\beta t,\ te^{\alpha t}\sin\beta t, \ldots$$

$$\ldots,\ t^{k-1}e^{\alpha t}\cos\beta t,\ t^{k-1}e^{\alpha t}\cos\beta t. \tag{17.20}$$

Рассмотрим поведение решений (17.17) – (17.20) при $t \to +\infty$.

Пусть в решениях (17.17), (17.18) $\lambda \neq 0$. Тогда

$$\lim_{t\to+\infty} t^k e^{\lambda t} = \begin{cases} 0 \ \text{ при } \ \lambda < 0, \\ +\infty \ \text{ при } \ \lambda > 0. \end{cases}$$

Далее, пусть в решениях (17.19), (17.20) $\alpha \neq 0$. Тогда

$$\lim_{t\to+\infty} t^k e^{\lambda t}\cos\beta t = 0,\quad \lim_{t\to+\infty} t^k e^{\lambda t}\sin\beta t = 0, \text{ если } \alpha < 0.$$

Функции $t^k e^{\alpha t}\cos\beta t$, $t^k e^{\alpha t}\sin\beta t$ неограниченны при $t \to +\infty$, если $\alpha > 0$.

Теперь пусть в решениях (17.17), (17.18) $\lambda = 0$. Тогда $t^k e^{\lambda t} = t^k$ и решение (17.17) приводит к $e^{0t} = 1$, т.е. к ограниченной функции, а решение (17.18), так как $k > 1$, – к неограниченным при $t \to +\infty$ функциям.

Будем называть корни характеристического уравнения (17.14) *характеристическими числами уравнения (17.13).*

Теорема 1. *Если все характеристические числа уравнения (17.13) имеют отрицательные действительные части, то нулевое решение (17.13) асимптотически устойчиво по Ляпунову (при $t \to +\infty$).*

Теорема 2. *Если хоть одно из характеристических чисел уравнения (17.13) имеет положительную действительную часть, то нулевое решение (17.13) неустойчиво.*

Теорема 3. *Если среди корней характеристического уравнения (17.14) нет таких, у которых действительная часть положительна, но имеются корни с нулевой действительной частью, причем каждому такому корню соответствуют только решения вида (17.17) при $\lambda = 0$ и (17.19) при $\alpha = 0$, то нулевое решение уравнения (17.13) устойчиво; если же хотя бы одному нулевому корню $\lambda = 0$*

соответствует хотя бы одно решение вида (17.18) при $k \geq 2$ или хотя бы одному корню с нулевой действительной частью $\alpha = 0$ соответствует хотя бы одно решение вида (17.20) при $k \geq 2$, то нулевое решение уравнения (17.13) неустойчиво.

Пример 1. Исследовать на устойчивость нулевое решение уравнения $x'' + 3x' + 2x = 0$.

▶ Характеристические числа данного уравнения $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$, т.е. отрицательны. Следовательно, согласно теореме 1, нулевое решение уравнения устойчиво асимптотически. Более того, оно устойчиво асимптотически в целом, так как областью притяжения нулевого решения является все фазовое пространство ($h = +\infty$). ◀

Пример 2. Исследовать на устойчивость нулевое решение уравнения $x''' - 2x'' + 4x' - 8x = 0$.

▶ Среди характеристических чисел данного уравнения есть положительное: $\lambda = 2$. По теореме 2 нулевое решение этого уравнения неустойчиво. ◀

Пример 3. Исследовать на устойчивость нулевое решение уравнения $x''' + 3x'' + x' + 3x = 0$.

▶ Находим характеристические числа данного уравнения: $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = i$, $\lambda_3 = -i$. Корню λ_1 соответствует решение $x_1 = e^{-3t}$, а корням $\lambda_{2,3}$ – $x_2 = \cos t$, $x_3 = \sin t$. Поэтому, согласно теореме 3, нулевое решение данного уравнения устойчиво неасимптотически. ◀

Пример 4. Исследовать на устойчивость нулевое решение уравнения $x^{(4)} + x''' + x'' = 0$.

▶ Среди характеристических чисел данного уравнения есть нулевое двукратное: $\lambda_{1,2} = 0$. Ему соответствует решение вида (17.20) при $k = 2$. Следовательно, согласно теореме 3, нулевое решение неустойчиво. ◀

17.5. ЛИНЕЙНЫЕ ОДНОРОДНЫЕ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ И УСТОЙЧИВОСТЬ ИХ РЕШЕНИЙ

Рассмотрим систему

$$\frac{dx_i}{dt} = \dot{x}_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k, \ a_{ik} = \text{const}, \ i = 2, ..., n, \ k = \overline{1,n}. \tag{17.21}$$

По аналогии с однородным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами будем искать частное решение (17.21) в виде

$$x_k = \gamma_k e^{\lambda t}, \quad \gamma_k = \text{const}. \tag{17.22}$$

Подставим x_k и $\dot{x}_k = \gamma_k \lambda e^{\lambda t}$ в систему (17.21) и сократим полученное равенство на $e^{\lambda t} \neq 0$. В результате придем к алгебраической системе, линейной относительно γ_k:

$$\sum_{\substack{k=1,\\ k\neq i}}^{n} a_{ik}x_k + (a_{ii} - \lambda)\gamma_i = 0. \tag{17.23}$$

Система (17.23) однородная, и существует ее решение, отличное от тривиального только тогда, когда определитель этой системы $\Delta(\lambda) = 0$, т.е.

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{17.24}$$

Уравнение (17.24) называется *характеристическим уравнением системы (17.21)*, его корни – *характеристические числа системы (17.21)*.

Для того чтобы x_k из формулы (17.22) являлось решением уравнения (17.21), отличным от тривиального, необходимо и достаточно, чтобы λ было характеристическим числом системы (17.21).

Алгебраическое уравнение (17.24) имеет ровно n корней. В зависимости от вида характеристических чисел можно построить фундаментальную систему решений системы (17.21) и найти общее решение системы (17.21) как линейную комбинацию решений, входящих в фундаментальную систему решений по аналогии с однородными линейными уравнениями.

Теорема 1. *Если все характеристические числа системы (17.21) имеют отрицательные действительные части, то нулевое решение этой системы асимптотически устойчиво.*

Теорема 2. *Если хоть одно из характеристических чисел системы (17.21) имеет положительную действительную часть, то нулевое решение этой системы неустойчиво.*

Теорема 3. *Если среди характеристических чисел системы (17.21) нет таких, у которых действительная часть положительна, но имеются характеристические числа с нулевой действительной частью, то нулевое решение системы (17.21) может быть устойчивым неасимптотически или неустойчивым.*

Для исследования устойчивости нулевого решения линейной системы с постоянными коэффициентами не обязательно решать характеристическое уравнение, а достаточно установить, какие знаки имеют действительные части характеристических чисел.

Приведем один из критериев, который позволяет по коэффициентам системы сразу установить, когда все ее характеристические числа имеют отрицательные действительные части и, следовательно, нулевое решение данной системы асимптотически устойчиво. Для этого запишем характеристическое уравнение (17.24) в виде (17.14):

$$P_n(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \ldots + a_n = 0. \tag{17.25}$$

Из коэффициентов многочлена $P_n(\lambda)$ составим матрицу:

$$\begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix}. \tag{17.26}$$

В этой матрице полагаем $a_m = 0$, если $m > n$. Рассмотрим диагональные определители матрицы (17.26):

$$\Delta_1 = a_1, \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}, \ \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix}, \ldots, \Delta_n = a_n \Delta_{n-1}.$$

Теорема 4 (Гурвица). *Для того чтобы все корни уравнения (17.25) имели отрицательные действительные части, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства*

$$\Delta_k > 0, \ k = \overline{1,n}. \tag{17.27}$$

Условия (17.27) называются *условиями Рауса – Гурвица.*

Пусть $n = 2$, т.е. $\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$. Тогда условие (17.27) принимает вид

$a_1 > 0$, $\begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ 0 & a_2 \end{vmatrix} > 0$, откуда $a_2 > 0$.

Таким образом, при $n = 2$ условия Рауса – Гурвица запишутся так:

$$a_1 > 0, \ a_2 > 0. \tag{17.28}$$

При $n=3$ имеем: $\lambda^3+a_1\lambda^2+a_2\lambda+a_3 = 0$, и условия (17.27) приобретут вид

$$a_1>0\,,\quad \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}>0\,,\quad a_3\begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}>0\,,$$

откуда $a_3>0$.

Условия Рауса – Гурвица в случае $n=3$ имеют следующий вид:

$$a_1>0\,,\ a_3>0\,,\ a_1a_2-a_3>0\,. \tag{17.29}$$

Аналогично находим условия Рауса – Гурвица в случаях $n=4$, $n=5$ и т.д.

Пример 1. Выяснить, при каких α и β (в какой области плоскости параметров α, β) устойчиво нулевое решение системы

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= -(\beta+4)y, \\ \dot{y} &= (2\alpha+\beta)x+(2-\alpha)y. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

▸ Характеристическое уравнение данной системы имеет вид

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -(\beta+4) \\ 2\alpha+\beta & 2-\alpha-\lambda \end{vmatrix} = 0\,,$$

или

$$\lambda^2+a_1\lambda+a_2 = 0\,,$$

где $a_1 = 2-\alpha$; $a_2 = (\beta+4)(2\alpha+\beta)$.

Устойчивость или неустойчивость нулевого решения системы (1) зависит от знаков коэффициентов a_1, a_2. Так как a_1 и a_2 являются непрерывными функциями от α и β, то знаки a_1, a_2 могут изменяться лишь там, где a_1 или a_2 обращается в нуль, т.е. на линиях $\alpha-2 = 0$, $\beta+4 = 0$, $2\alpha+\beta = 0$. Эти линии пересекаются в одной точке A (2, −4) и разбивают плоскость на шесть областей (рис.17.11), в каждой из которых знаки коэффициентов a_1, a_2 неизменны. Поэтому, взяв в каждой из этих областей произвольную точку, можно определить знаки коэффициентов в соответствующей области:

I – $A_1(3,0)$: $a_1 = 1>0$, $a_2 = 24>0$;

II – $A_2(1,0)$: $a_1 = -1<0$, $a_2 = 8>0$;

III – $A_3(-1,0)$: $a_1 = -3<0$, $a_2 = -8<0$;

IV – $A_4(0,-5)$: $a_1 = -2<0$, $a_2 = 5>0$;

V – $A_5(3,-7)$: $a_1 = 1>0$, $a_2 = 3>0$;

VI – $A_6(3,-5)$: $a_1 = 1>0$, $a_2 = -1<0$.

Характеристические числа системы (1) выражаются через a_1, a_2 по формуле

$$\lambda_{1,2} = \frac{-a_1\pm\sqrt{a_1^2-4a_2}}{2}\,.$$

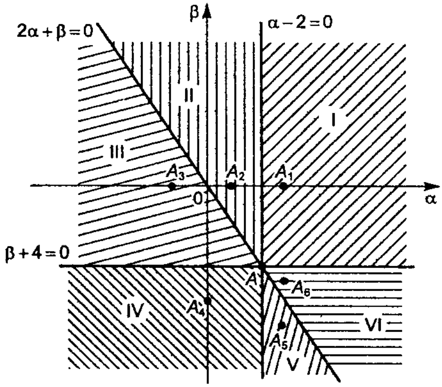


Рис. 17.11

Если $a_1 < 0$, то или $a_1^2 - 4a_2 \geq 0$ (тогда одно из характеристических чисел положительно), или $a_1^2 - 4a_2 < 0$ (характеристические числа – комплексно-сопряженные с положительной действительной частью). Если $a_2 < 0$, то $\sqrt{a_1^2 - 4a_2} - a_1 > 0$ и одно из характеристических чисел положительно. Следовательно, в областях II, III, IV, VI нулевое решение системы (1) неустойчиво (см. теорему 2). При $a_1 > 0$, $a_2 > 0$ (условия Рауса – Гурвица) имеем: $\lambda_{1,2} < 0$. Поэтому в областях I и V движение устойчиво асимптотически (см. теорему 1). ◀

Пример 2. Найти область асимптотической устойчивости нулевого решения системы

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -x - \alpha y, \\ \frac{dy}{dt} &= \beta x - y + \alpha z, \\ \frac{dz}{dt} &= \beta y - z, \end{aligned}\right\} \ \alpha, \beta \text{ – действительные числа.}$$

▶ Характеристическое уравнение данной системы имеет вид

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & -\alpha & 0 \\ \beta & -1-\lambda & \alpha \\ 0 & \beta & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

или $(\lambda + 1)(\lambda^2 + 2\lambda + 1 - 2\alpha\beta) = 0$. Корнями последнего уравнения будут $\lambda_1 = -1, \lambda_{2,3} = -1 \pm \sqrt{1 - (1 - 2\alpha\beta)}$. Корни $\lambda_{2,3}$ будут отрицательными, если $1 - 2\alpha\beta > 0$, т.е. $\alpha\beta < 1/2$. Согласно теореме 1 в области $\alpha\beta < 1/2$ нулевое решение устойчиво асимптотически. Если $1 - 2\alpha\beta < 0$, то появляется один положительный корень и, согласно теореме 2, нулевое решение неустойчиво.

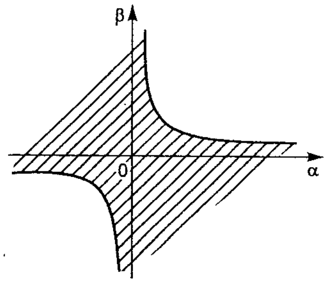


Рис. 17.12

При $1-2\alpha\beta = 0$ имеем два отрицательных корня и один нулевой, т.е. по теореме 3 нулевое решение устойчиво (рис. 17.12). ◀

17.6. ИССЛЕДОВАНИЕ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ НА УСТОЙЧИВОСТЬ ПО ПЕРВОМУ ПРИБЛИЖЕНИЮ

Рассмотрим нелинейную систему

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k + X_i(x_1, x_2, ..., x_n)\ , \ i = \overline{1,n}, \tag{17.30}$$

и соответствующую ей линейную систему

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k\ , \ i = \overline{1,n}. \tag{17.31}$$

Предположим, что

$$X_i(0, 0, ..., 0) = 0\ , \ \sum_{i=1}^{n} X_i^2(x_1, x_2, ..., x_n) \le A \sum_{i=1}^{n} (x_i^2)^{1+\alpha}\ , \tag{17.32}$$

где $\alpha > 0$; A – положительная постоянная.

Система (17.31) называется *системой первого приближения* для системы (17.30).

Теорема 1 (об устойчивости по первому приближению). *Если все характеристические числа системы первого приближения (17.31) имеют отрицательные действительные части, то нулевое решение нелинейной системы (17.30) устойчиво асимптотически.*

Теорема 2 (о неустойчивости по первому приближению). *Если среди характеристических чисел системы первого приближения (17.31) имеется хотя бы одно с положительной действительной частью, то нулевое решение нелинейной системы (17.30) неустойчиво.*

Теорема 3. Если среди характеристических чисел системы первого приближения нет таких, действительные части которых положительны, но имеются характеристические числа с нулевыми действительными частями, так что нулевое решение системы (17.31) или неасимптотически устойчиво, или неустойчиво, то нулевое решение нелинейной системы (17.30) может быть как устойчиво, так и неустойчиво, в зависимости от выбора нелинейных частей $X_i(x_1, x_2, ..., x_n)$, $i = \overline{1,n}$.

Пример 1. Исследовать на устойчивость нулевое решение системы

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\sin(x+y), \\ \frac{dy}{dt} &= \sin(x-y). \end{aligned}\right\}$$

▸ Используя разложение функции $\sin\alpha$ в ряд Маклорена:

$$\sin\alpha = \alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^5}{5!} + ...,$$

получаем, что система первого приближения данной системы имеет вид

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -x-y, \\ \frac{dy}{dt} &= x-y. \end{aligned}\right\}$$

Ее характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} -\lambda-1 & -1 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2+2\lambda+2 = 0\,.$$

Характеристические числа $\lambda_{1,2} = -1 \pm i$ имеют отрицательные действительные части. По теореме 1 нулевое решение данной системы асимптотически устойчиво. ◂

Пример 2. Исследовать на устойчивость нулевое решение системы

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= e^{3x+4y}-1, \\ \frac{dy}{dt} &= -x-2y+x^2+y^2. \end{aligned}\right\}$$

▸ Воспользовавшись разложением в степенной ряд функции e^{α}:

$$e^{\alpha} = 1+\alpha+\frac{\alpha^2}{2!}+ ... ,$$

получим систему первого приближения для данной системы:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 3x+4y, \\ \frac{dy}{dt} &= -x-2y. \end{aligned}\right\}$$

Ее характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 4 \\ -1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2-\lambda-2 = 0 .$$

Характеристические числа $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -1$. Поскольку одно из характеристических чисел системы положительно, то на основании теоремы 2 нулевое решение данной системы неустойчиво. ◀

Пример 3. Исследовать на устойчивость нулевое решение системы

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= ay-x^3, \\ & \qquad\qquad a>0,\ b>0. \\ \frac{dy}{dt} &= -bx-y^3, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

▶ Нулевое решение системы (1) асимптотически устойчиво, так как функция Ляпунова $v = bx^2+ay^2$ удовлетворяет условиям теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости:

$$\left.\frac{dv}{dt}\right|_{(1)} = -2(bx^4+ay^4) \le 0 . ◀$$

Пример 4. Исследовать на устойчивость точку покоя с координатами $x = 0$, $y = 0$ системы

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= ay+x^3, \\ & \qquad\qquad a>0,\ b>0. \\ \frac{dy}{dt} &= -bx+y^3, \end{aligned}\right\}$$

▶ Данная система имеет такую же линейную часть, что и система (1) из примера 3. Согласно первой теореме Ляпунова о неустойчивости нулевое решение данной системы неустойчиво, так как

$$v = bx^2+ay^2, \quad \left.\frac{dv}{dt}\right|_{(1)} = 2(bx^4+ay^4) \ge 0 . ◀$$

З а м е ч а н и е. Рассмотрим более подробно системы уравнений из примеров 3 и 4, для которых система первого приближения одна и та же:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= ay, \\ \frac{dy}{dt} &= -bx. \end{aligned}\right\} \qquad (17.33)$$

Характеристическое уравнение системы (17.33) $\lambda^2+ab = 0$ имеет чисто миимые корни: $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{ab}\cdot i$, т.е. действительные части характеристических чисел – нулевые. Добавление к линейной части нелинейных членов приводит в окрестности начала координат к малому изменению определенного системой (17.33) поля направлений касательных к интегральным кривым. Однако это малое изменение поля направлений приводит к тому, что замкнутые интегральные кривые $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\mathrm{const}\right)$ (рис. 17.13, *а*) системы (17.33) пре-

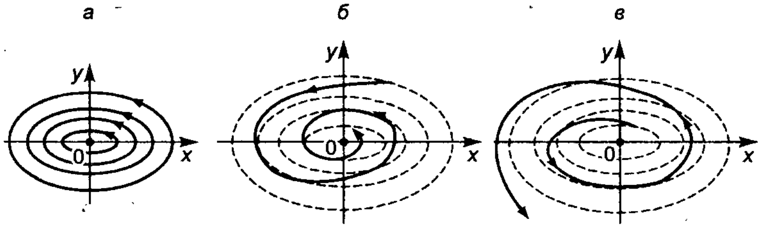


Рис. 17.13

вращаются в спирали, которые в случае примера 3 с увеличением t приближаются к началу координат (рис. 17.13, *б*), а в случае примера 4 удаляются от него (рис. 17.13, *в*), т.е. нелинейные части уравнений систем могут влиять на устойчивость точки покоя (см. теорему 3).

АЗ-17.1

1. Исследовать на устойчивость решение $y=\varphi(x)$ данного дифференциального уравнения $y'=f(x,y)$, удовлетворяющего начальному условию $\varphi(x_0)=y_0$, с помощью определений устойчивости и неустойчивости по Ляпунову:

а) $y'+\omega^2 y=0$, $\omega\in\mathbf{R}$; $\varphi(x_0)=y_0$, $x_0, y_0\in\mathbf{R}$;

б) $y'+\frac{y}{x}=x$, $\varphi(1)=-1$;

в) $y'+\frac{y}{x}=\frac{\sin x}{x}$, $\varphi(2)=1$;

г) $y'+xy=x^3y^3$, $\varphi(0)=1$.

(*Ответ*: а) устойчиво асимптотически в целом; б) неустойчиво; в) устойчиво; г) устойчиво асимптотически.)

2. С помощью теорем Ляпунова выяснить, при каких значениях параметров $\alpha,\beta\in\mathbf{R}$ нулевое решение однородного линейного дифференциального уравнения $y''+ay'+\beta y=0$: а) устойчиво асимптотически; б) устойчиво; в) неустойчиво.

(*Ответ*: а) $\alpha > 0$, $\beta > 0$; б) $\alpha = 0$, $\beta > 0$; $\alpha > 0$, $\beta = 0$; в) $\alpha > 0$, $\beta < 0$; $\alpha < 0$, $\beta \in \mathbf{R}$; $\alpha = 0$, $\beta \le 0$.)

3. Используя значения характеристических чисел и соответствующие теоремы Ляпунова, исследовать на устойчивость нулевое решение линейной однородной системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

а) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2y + x; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -2x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -2y + x; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - 8y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -2y + x; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x - y + z, \\ \dfrac{dz}{dt} = 2y - z; \end{cases}$

д) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x + \dfrac{y}{2}, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - y + \dfrac{z}{2}, \\ \dfrac{dz}{dt} = y - z; \end{cases}$ е) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x + \dfrac{y}{3}, \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{x}{2} - y + \dfrac{z}{3}, \\ \dfrac{dz}{dt} = \dfrac{y}{2} - z. \end{cases}$

(*Ответ*: а) неустойчиво; б) устойчиво асимптотически; в) устойчиво; г) неустойчиво; д) устойчиво; е) устойчиво асимптотически.)

Самостоятельная работа

При любых начальных условиях $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$ исследовать на устойчивость решение указанного дифференциального уравнения.

1. $y'' + 6y' + 5y = 3e^{-2x}$. (*Ответ:* устойчиво асимптотически в целом.)

2. $y'' + 6y' - 16y = \sin x$. (*Ответ:* неустойчиво.)

3. $y'' + 4y = \cos 2x$. (*Ответ*: устойчиво).

1. Показать, что для системы

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a_{11}x + a_{12}y, \\ & \qquad\qquad a_{ij} = \text{const} \\ \frac{dy}{dt} &= a_{21}x + a_{22}y, \end{aligned}\right\}$$

функция $v = (a_{22}x - a_{12}y)^2 + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x^2$ является функцией Ляпунова. Пользуясь теоремой Гурвица, указать условия асимптотической устойчивости нулевого решения. (*Ответ*: $a_{11} + a_{22} < 0$, $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} > 0$.)

2. Исследовать нулевое решение системы на устойчивость: в первом приближении; с помощью функции Ляпунова v.

а) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y + 3x^3y^2 + 4x^5, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + y^3 + x^4y, \end{cases} \quad v = \dfrac{1}{2}(x^2 + y^2);$

б) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -y - x^3 - \dfrac{3}{2}xy^2, \\ \dfrac{dy}{dt} = -3y + x^2y - \dfrac{3}{2}xy^2, \end{cases} \quad v = \dfrac{1}{2}(3x^2 - 2xy + y^2);$

в) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + 2y^3, \end{cases} \quad v = x^2 + 3y^2;$

г) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -y - x^3, \\ \dfrac{dy}{dt} = x, \end{cases} \quad v = x^2 + y^2.$

(*Ответ*: а) устойчиво; неустойчиво; б) устойчиво; устойчиво асимптотически; в) устойчиво; неустойчиво; г) устойчиво; устойчиво.)

3. Дифференциальное уравнение

$$\dddot{x} + a\ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0, \quad a, b, c \in \mathbf{R}, \tag{1}$$

эквивалентно системе ($x \equiv x_1$)

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -ax_2 + x_3, \\ \dot{x}_3 &= -cx_1 - bx_2. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Доказать, что в качестве функции Ляпунова для системы (2) можно выбрать функцию $v = acx_1^2 + 2cx_1x_2 + bx_2^2 + x_3^2$. С помощью критерия Сильвестра указать условия: 1) асимптотической устойчивости нулевого решения уравнения (1); 2) неустойчивости нулевого решения уравнения (1). (*Ответ*: 1) $a > 0$, $c > 0$, $ab > c$; 2) $a < 0$, $c < 0$, $ab < c$.)

Самостоятельная работа

1. Исследовать на устойчивость нулевое решение $y = 0$ дифференциального уравнения $y'' + ky' + \omega^2 \sin y = 0$, где $k > 0$; $\omega \in \mathbf{R}$. (*Ответ*: асимптотически устойчиво, если $\omega \neq 0$; устойчиво, если $\omega = 0$.)

2. Исследовать на устойчивость нулевое решение $y = 0$ уравнения $3y'' + 2ky' - \omega^2 \sin y = 0$, где $k > 0$; $\omega \in \mathbf{R}$. (*Ответ*: неустойчиво, если $\omega \neq 0$; устойчиво, если $\omega = 0$.)

3. Исследовать на устойчивость нулевое решение системы

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y - x^2y^2 - 4x^5, \\ \frac{dy}{dt} &= -x - y^3 + x^3y \end{aligned}\right\}$$

а) в первом приближении; б) с помощью функции Ляпунова $v = x^2 + y^2$. (*Ответ*: а) устойчиво; б) устойчиво асимптотически.)

17.7. ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ДОМАШНИЕ ЗАДАНИЯ К ГЛ. 17

ИДЗ-17.1

1. Исследовать на устойчивость решение $y = \varphi(x)$ уравнения $y' = f(x, y)$, удовлетворяющее начальному условию $\varphi(x_0) = y_0$, используя определения устойчивости и неустойчивости по Ляпунову.

1.1. $y' = \dfrac{1-2x}{y^2}$, $\varphi(0) = 1$. (*Ответ:* асимптотически устойчиво в целом.)

1.2. $y' = (1+y)\operatorname{ctg} x$, $\varphi(\pi/6) = 0$. (*Ответ:* устойчиво.)

1.3. $y' = \dfrac{y}{x}\ln\dfrac{y}{x}$, $\varphi(1) = e^2$. (*Ответ:* неустойчиво.)

1.4. $y' = \dfrac{y}{x} + \sqrt{1+\dfrac{y}{x}}$, $\varphi(1) = 0$. (*Ответ:* устойчиво.)

1.5. $y' = xe^{-x^2} - 2xy$, $\varphi(0) = 3$. (*Ответ:* асимптотически устойчиво в целом.)

1.6. $y' = \dfrac{2xy}{1+x^2} + x^2 + 1$, $\varphi(-1) = 2$. (*Ответ:* неустойчиво.)

1.7. $y' = 1 + \dfrac{2x-1}{x^2}y$, $\varphi(1) = 1+e$. (*Ответ:* неустойчиво.)

1.8. $y' = y^2\dfrac{\ln x}{x} - \dfrac{y}{x}$, $\varphi(1) = 1$. (*Ответ:* асимптотически устойчиво в целом.)

1.9. $y' = \dfrac{2y}{x} - \dfrac{y^2}{x^2}$, $\varphi(2) = 1$. (*Ответ:* устойчиво.)

1.10. $y' = \dfrac{y}{x}\ln\dfrac{y}{x}$, $\varphi(1) = 1$. (*Ответ:* устойчиво асимптотически.)

Исследовать на устойчивость частное решение $y = \varphi(x)$ уравнения $y'' = f(x, y, y')$, удовлетворяющее начальным условиям $\varphi(x_0) = y_0$, $\varphi'(x_0) = y'_0$, используя определения устойчивости и неустойчивости по Ляпунову.

1.11. $y'' = \frac{y'}{x} \ln \frac{y'}{x}$, $\varphi(1) = -2$, $\varphi'(1) = 1$. (*Ответ:* устойчиво.)

1.12. $y'' = y' + x$, $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) = 0$. (*Ответ:* неустойчиво.)

1.13. $y'' = \frac{2y'^2}{y-1}$, $\varphi(-1) = 0$, $\varphi'(-1) = -0{,}5$. (*Ответ:* устойчиво асимптотически.)

1.14. $y'' = \frac{y'}{x} \ln \frac{y'}{x}$, $\varphi(-1) = -2$, $\varphi'(-1) = -1$. (*Ответ:* неустойчиво.)

1.15. $y'' = \frac{y'^2}{y}$, $\varphi(0) = 1$, $\varphi'(0) = -1$. (*Ответ:* устойчиво асимптотически.)

1.16. $y'' = \frac{\ln y + 1}{\ln y - 1} \frac{y'^2}{y}$, $\varphi(0) = e^{-1}$, $\varphi'(0) = \frac{2}{e}$. (*Ответ:* устойчиво асимптотически.)

1.17. $y'' = \frac{y'^2}{y}$, $\varphi(0) = 1$, $\varphi'(0) = 1$. (*Ответ:* неустойчиво.)

1.18. $y'' = \frac{y' - xy'^2}{x+1}$, $\varphi(1) = \frac{\pi}{2}$, $\varphi'(1) = 2$. (*Ответ:* устойчиво.)

1.19. $y'' = \frac{1 - y'^2}{y}$, $\varphi(2) = -1$, $\varphi'(2) = 0$. (*Ответ:* устойчиво.)

1.20. $y'' = \frac{-y'^2}{2y}$, $\varphi(5) = 3$, $\varphi'(5) = 2$. (*Ответ:* неустойчиво.)

Даны однородное (неоднородное) линейное дифференциальное уравнение второго порядка и частное решение однородного уравнения $y_1 = y_1(x)$. Исследовать на устойчивость решение данного уравнения, удовлетворяющее начальным условиям $\varphi(x_0) = y_0$, $\varphi'(x_0) = y'_0$, используя определения устойчивости и неустойчивости по Ляпунову.

1.21. $(1-x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$, $y_1 = x$, $\varphi(0) = -2$, $\varphi'(0) = 4$. (*Ответ:* неустойчиво.)

1.22. $y'' + \frac{2}{x}y' + y = 0$, $y_1 = \frac{\sin x}{x}$, $\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{\pi}$, $\varphi'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$. (*Ответ:* устойчиво асимптотически в целом.)

1.23. $(2x-x^2)y'' + (x^2-2)y' + 2(1-x)y = 0$, $y_1 = e^x$, $\varphi(1) = 0$, $\varphi'(1) = 1$. (*Ответ:* неустойчиво.)

1.24. $(1-x^2)y'' - xy' + 9y = 0$, $y_1 = 4x^3 - 3x$, $\varphi(0) = -1$, $\varphi'(0) = 2$. (*Ответ:* неустойчиво.)

1.25. $y'' - y' \operatorname{tg} x + 2y = 0$, $y_1 = \sin x$, $\varphi(0) = 1$, $\varphi'(0) = 2$. (*Ответ:* неустойчиво.)

При любых начальных условиях $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$ исследовать на устойчивость решение данного дифференциального уравнения, используя определения устойчивости и неустойчивости по Ляпунову.

1.26. $2y'' + 5y' = \cos^2 x$. (*Ответ:* устойчиво.)

1.27. $y'' + 2y' + 5y = \sin 2x$. (*Ответ:* устойчиво асимптотически в целом.)

1.28. $2y'' + y' - y = 12e^{-x}$. (*Ответ:* неустойчиво.)

1.29. $4y'' + 16y' + 15y = e^{(5/2)x}$. (*Ответ:* устойчиво асимптотически в целом.)

1.30. $y'' + y + \operatorname{ctg}^2 x = 0$. (*Ответ:* устойчиво.)

2. Исследовать на устойчивость нулевое решение дифференциального уравнения или системы дифференциальных уравнений, используя соответствующие теоремы Ляпунова об устойчивости и неустойчивости, характеристические числа и условия Рауса – Гурвица.

2.1. $y''' + 2y'' + y' + y = 0$. (*Ответ:* устойчиво асимптотически.)

2.2. $5y''' - 15y'' + y' - 2y = 0$. (*Ответ:* неустойчиво.)

2.3. $3y''' + 2y'' + 6y' + 3y = 0$. (*Ответ:* устойчиво асимптотически.)

2.4. $y''' - 2y'' + y' - y = 0$. (*Ответ:* неустойчиво.)

2.5. $\begin{cases} y'_1 = -y_1 + y_2/3, \\ y'_2 = y_1/3 - y_2 + y_3/3, \\ y'_3 = y_2/3 - y_3. \end{cases}$ (*Ответ:* устойчиво асимптотически.)

2.6. $\begin{cases} y'_1 = y_2 + y_3, \\ y'_2 = y_1 + y_3, \\ y'_3 = y_1 + y_2. \end{cases}$ (*Ответ:* неустойчиво.)

2.7. $\begin{cases} y'_1 = -y_1 - y_2, \\ y'_2 = -2y_1 - y_2 - y_3, \\ y'_3 = -2y_2 - y_3. \end{cases}$ (*Ответ:* неустойчиво.)

2.8. $\begin{cases} y'_1 = -3y_1 + 2y_2 + 4y_3, \\ y'_2 = -y_2 - 2y_3, \\ y'_3 = -2y_3. \end{cases}$ (*Ответ:* устойчиво асимптотически.)

2.9. $3y^{(4)} + 10y'' - 8y = 0$. (*Ответ:* неустойчиво.)

2.10. $3y^{(4)} + 11y''' + 27y'' + 29y' + 10y = 0$. (*Ответ:* устойчиво асимптотически.)

Исследовать нулевое решение указанной системы дифференциальных уравнений на устойчивость: в первом приближении; с помощью функции Ляпунова v.

2.11. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -4x + 2y^3 - 4x^3, \end{cases}$ $v = x^4 + 2x^2 + \frac{1}{2}y^2$. (*Ответ:* устойчиво; неустойчиво.)

2.12. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x - 4x^3 - 2y^5, \end{cases}$ $\quad v = x^4 + x^2 + \dfrac{1}{2}y^2$. (*Ответ:* устойчиво; устойчиво.)

2.13. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -y + xy - x^3 - \dfrac{1}{2}xy^2, \\ \dfrac{dy}{dt} = -3y + xy + x^2y - \dfrac{1}{2}xy^2, \end{cases}$ $\quad v = 3x^2 - 2xy + y^2$.

(*Ответ:* устойчиво; устойчиво асимптотически.)

2.14. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y - xy^2, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x^3, \end{cases}$ $\quad v = x^4 + 2y^2$. (*Ответ:* неустойчиво; устойчиво асимптотически.)

2.15. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -2x - 3y^5, \\ \dfrac{dy}{dt} = x, \end{cases}$ $\quad v = x^2 + y^6$. (*Ответ:* устойчиво; устойчиво асимптотически.)

2.16. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -y^3, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - x^2y, \end{cases}$ $\quad v = 2x^2 + y^4$. (*Ответ:* устойчиво; устойчиво асимптотически.)

2.17. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -4y - x^5, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x - y^3, \end{cases}$ $\quad v = 3x^2 + 4y^2$. (*Ответ:* устойчиво; устойчиво асимптотически.)

2.18. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -4y - 2x^3 - 4y^3, \\ \dfrac{dy}{dt} = x, \end{cases}$ $\quad v = \dfrac{1}{2}x^2 + 2y^2 + y^4$. (*Ответ:* устойчиво; неустойчиво.)

2.19. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y + x(x^2 + y^4), \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + y(x^2 + y^4), \end{cases}$ $v = x^2 + y^2$. (*Ответ:* устойчиво; неустойчиво.)

2.20. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -3x + xy + xy^3 - \dfrac{1}{2}x^2 y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + xy - y^3 - \dfrac{1}{2}x^2 y, \end{cases}$ $v = x^2 - 2xy + 3y^2$.

(*Ответ:* устойчиво; устойчиво асимптотически.)

Исследовать на устойчивость нулевое решение указанной системы дифференциальных уравнений.

2.21. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x(3 + \sin y), \\ \dfrac{dy}{dt} = -y(1 + \cos 2x). \end{cases}$ (*Ответ:* неустойчиво.)

2.22. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x(1 + \cos y), \\ \dfrac{dy}{dt} = y(2 + \sin x). \end{cases}$ (*Ответ:* неустойчиво.)

2.23. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{1}{2}(e^x - 1) - 3y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - \sin y. \end{cases}$ (*Ответ:* устойчиво асимптотически.)

2.24. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x + y\cos y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 2y + y^2 e^y. \end{cases}$ (*Ответ:* неустойчиво.)

2.25. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \ln(4y + e^{-3x}), \\ \dfrac{dy}{dt} = \sqrt[3]{1 - 6x} + 2y - 1. \end{cases}$ (*Ответ:* устойчиво асимптотически.)

2.26. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = e^{x+2y} - \cos 3x, \\ \dfrac{dy}{dt} = \sqrt{4+8x} - 2e^{y}. \end{cases}$ (*Ответ:* неустойчиво.)

2.27. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 7x + 2\sin y, \\ \dfrac{dy}{dt} = e^{x} - 3y - 1. \end{cases}$ (*Ответ:* неустойчиво.)

2.28. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \ln(4x + e^{-3y}), \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x - 1 + \sqrt[3]{1-6y}. \end{cases}$ (*Ответ:* неустойчиво.)

2.29. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -3x + e^{y} - 1, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2\sin x - 5y. \end{cases}$ (*Ответ:* устойчиво асимптотически.)

2.30. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - 1 + \sqrt[3]{1-6y}, \\ \dfrac{dy}{dt} = \ln(4x + e^{-3y}). \end{cases}$ (*Ответ:* устойчиво асимптотически.)

Решение типового варианта

1. Исследовать на устойчивость частное решение $y = \varphi(x)$ дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$, удовлетворяющее начальному условию $\varphi(x_0) = y_0$, используя определения устойчивости и неустойчивости по Ляпунову:

1) $y' + \dfrac{y}{x} = 1 + 2\ln x$, $\varphi(1) = 1$;

2) $y' = \dfrac{e^{2x}y}{1+e^{2x}}$, $\varphi(0) = 2$;

3) $y' = y \operatorname{ctg} x + \dfrac{y^3}{\sin x}$, $\varphi\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{1}{2}$.

▸ 1. Решая данное линейное уравнение стандартным методом, находим его общее решение: $y = x \ln x + C/x$. Используя начальное условие, вычисляем значение произвольной постоянной: $C = 1$. Следовательно, частное решение имеет вид $y = \varphi(x) = x \ln x + 1/x$. Для того чтобы исследовать его на устойчивость, возьмем любое другое решение $y = f(x)$ данного дифференциального уравнения при начальных данных (x_0, y_0), достаточно мало отличающихся от начальных данных $(1, 1)$. Тогда C будет достаточно мало отличаться от 1 и $f(x) = x \ln x + C/x$. Далее,

$$|f(x) - \varphi(x)| = \left|\frac{C}{x} - \frac{1}{x}\right| \to 0$$

при $x \to +\infty$, т.е. модуль указанной разности можно сделать меньшим любого наперед заданного $\varepsilon > 0$, что и означает, согласно определению, устойчивость данного частного решения. Более того, так как модуль этой разности стремится к нулю при любом C, то данное частное решение устойчиво асимптотически в целом.

2. Находим общее решение дифференциального уравнения с разделяющимися переменными:

$$y = f(x) = C\sqrt{1 + e^{2x}}.$$

При данном начальном условии $C = 2$ и $\varphi(x) = 2\sqrt{1 + e^{2x}}$, поэтому

$$|f(x) - \varphi(x)| = |C - 2|\sqrt{1 + e^{2x}}.$$

Если $x \to +\infty$, то модуль этой разности стремится к бесконечности и превосходит любое наперед заданное $\varepsilon > 0$, каково бы ни было $\delta > 0$. Это и означает, что данное решение неустойчиво.

3. Общее решение данного уравнения Бернулли имеет вид

$$y = f(x) = \sin x/\sqrt{2\cos x + C}.$$

Выделяем из него частное решение при $C = 4$, удовлетворяющее указанному начальному условию:

$$y = \varphi(x) = \sin x/\sqrt{2\cos x + 4}.$$

Далее находим, что

$$|f(x) - \varphi(x)| = |\sin x|\left|\sqrt{2\cos 2x + 4} - \sqrt{2\cos x + C}\right| \times$$

$$\times\left|\sqrt{2\cos x + C}\sqrt{2\cos x + 4}\right|^{-1}.$$

При значениях C, достаточно близких к 4 (достаточно малых $\delta > 0$), это выражение можно сделать меньшим любого наперед заданного $\varepsilon > 0$ при любых $x \geq \pi/2$, т.е. данное частное решение устойчиво (неасимптотически). ◀

2. Исследовать на устойчивость частное решение $y = \varphi(x)$ уравнения $y'' = f(x, y, y')$, удовлетворяющее начальным условиям $\varphi(x_0) = y_0$, $\varphi'(x_0) = y'_0$, используя определения устойчивости и неустойчивости по Ляпунову:

1) $y'' = \dfrac{y - xy'}{x^2}$, $\varphi(2) = 1$, $\varphi'(2) = -1$;

2) $y'' = \dfrac{2y'^2}{y - 1}$, $\varphi(0) = 2$, $\varphi'(0) = -2$.

▶ 1. Подстановка $y' = yz$ приводит к уравнению $y'' = y'z + yz' = yz^2 + yz'$ или $z' + z/x = 1/x^2 - z^2$. Отсюда находим z, а затем, решая уравнение $y' = yz$, получаем общее решение данного уравнения:

$$y = f(x) = C_1x + C_2/x.$$

С помощью начальных условий вычисляем произвольные постоянные C_1 и C_2: $C_1 = -1/4$, $C_2 = 3$. Искомое частное решение

$$y = \varphi(x) = -\frac{1}{4}x + \frac{3}{x}.$$

Тогда

$$|f(x)-\varphi(x)| = \left|\left(C_1+\frac{1}{4}\right)x+\frac{C_2-3}{x}\right| \to \left|C_1+\frac{1}{4}\right||x| \text{ при } x\to+\infty,$$

т.е., как бы мало ни отличалась постоянная C_1 от $-1/4$, а C_2 – от 3 (т.е. как бы ни было мало $\delta > 0$), модуль указанной разности решений не может быть меньше любого наперед заданного $\varepsilon > 0$. Следовательно, найденное частное решение неустойчиво.

2. Общее решение данного уравнения:

$$y = f(x) = 1+\frac{1}{C_1x+C_2}.$$

Частное решение, удовлетворяющее указанным начальным условиям, имеет вид

$$y = \varphi(x) = 1+\frac{1}{2x+1}.$$

Тогда

$$|f(x)-\varphi(x)| = \left|\frac{1}{C_1x+C_2}-\frac{1}{2x+1}\right|.$$

Каковы бы ни были $C_1\neq 0$ и $C_2\neq 0$, последнее выражение стремится к нулю при $x\to\pm\infty$. Отсюда следует, что частное решение исходного уравнения устойчиво асимптотически в целом. ◄

3. Исследовать на устойчивость нулевое решение:

1) $6y^{(4)}+19y'''+46y''+39y'+10y = 0$;

2) $\begin{cases} y'_1 = -y_1+2y_2, \\ y'_2 = 5y_1-y_2+2y_3, \\ y'_3 = 5y_2-y_3. \end{cases}$

► 1. Запишем характеристическое уравнение $6\lambda^4+19\lambda^3+$ $+46\lambda^2+39\lambda+10 = 0$ и перепишем его в виде (17.25): $\lambda^4+a_1\lambda^3+a_2\lambda^2+a_3\lambda+a_4 = 0$, где $a_1 = 19/6$, $a_2 = 23/3$, $a_3 = 13/2$, $a_4 = 5/3$. Составим матрицу (17.26):

$$\begin{pmatrix} 19/6 & 1 & 0 & 0 \\ 13/2 & 23/3 & 19/6 & 1 \\ 0 & 5/3 & 13/2 & 23/3 \\ 0 & 0 & 0 & 5/3 \end{pmatrix}$$

и выясним, выполняются ли условия Рауса – Гурвица (17.27):

$$\Delta_1 = 19/6 > 0\,,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 19/6 & 1 \\ 13/2 & 23/3 \end{vmatrix} = \frac{437}{18} - \frac{13}{2} = \frac{160}{9} > 0\,,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 19/6 & 1 & 0 \\ 13/2 & 23/3 & 19/6 \\ 0 & 5/3 & 13/2 \end{vmatrix} = \frac{10\ 675}{108} > 0\,,$$

$$\Delta_4 = a_4\ \Delta_3 = \frac{53\ 375}{324} > 0\,.$$

Условия Рауса – Гурвица выполнены. Следовательно, действительные части всех корней характеристического уравнения имеют отрицательные значения и, согласно соответствующей теореме Ляпунова, нулевое решение данного уравнения устойчиво асимптотически.

2. Данная система линейна, ее характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 & 0 \\ 5 & -1-\lambda & 2 \\ 0 & 5 & -1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= -(1+\lambda)^3 + 20(1+\lambda) = (1+\lambda)(19 - 2\lambda - \lambda^2) = 0$$

имеет два отрицательных и один положительный корень. По теореме Ляпунова о неустойчивости нулевое решение неустойчиво. ◀

4. Исследовать нулевое решение данной системы на устойчивость в первом приближении; с помощью функции Ляпунова v.

$$1)\ \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -y + x(x^4 + y^2), \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y(x^4 + y^2), \end{cases} \qquad v = x^2 + y^2\,;$$

2) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3y - x^3, \\ \dfrac{dy}{dt} = -4x - y^5, \end{cases} \qquad v = 4x^2 + 3y^2.$

▶ 1. Запишем данную систему в первом приближении и ее характеристическое уравнение:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -y, \\ \frac{dy}{dt} &= x, \end{aligned}\right\} \quad \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0.$$

Характеристические числа (корни) $\lambda_{1,2} = \pm i$, поэтому общее решение линейной системы по известному правилу выражается линейной комбинацией функций $\sin t$ и $\cos t$. Отсюда следует устойчивость (неасимптотическая) нулевого решения системы в первом приближении.

Воспользуемся функцией Ляпунова. Найдем $\dot{v} = dv/dt$ в силу данной системы

$$\dot{v} = 2x\dot{x} + 2y\dot{y} = 2(x^6 + x^4y^2 + x^2y^2 + y^4) \geq 0,$$

которая, как и функция Ляпунова v, является положительно определенной. Согласно первой теореме Ляпунова о неустойчивости нулевое решение данной системы неустойчиво.

2. Запишем данную систему в первом приближении и ее характеристическое уравнение:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 3y, \\ \frac{dy}{dt} &= -4x, \end{aligned}\right\} \quad \begin{vmatrix} -\lambda & 3 \\ -4 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 12 = 0.$$

Поскольку $\lambda_{1,2} = \pm 2\sqrt{3}\, i$, то, как и в случае 1, общее решение является линейной комбинацией $\sin 2\sqrt{3}\,t$ и $\cos 2\sqrt{3}\,t$ и нулевое решение линейной системы устойчиво (неасимптотически).

Полная производная функции Ляпунова $v \geq 0$ в силу системы имеет вид

$$\dot{v} = 8x\dot{x} + 6y\dot{y} = -2(4x^4 + 3y^6) \leq 0.$$

Она отрицательно определенная и, согласно теореме Ляпунова об асимптотической устойчивости, нулевое решение данной системы устойчиво асимптотически. ◂

17.8. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ К ГЛ. 17

С помощью функции Ляпунова v исследовать на устойчивость нулевое решение системы дифференциальных уравнений:

1. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y - 3x^3, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x - 7y^3, \end{cases}$ $v(x,y) = x^2 + y^2$. (*Ответ*: устойчиво.)

2. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -y + x(x^2 + y^2), \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y(x^2 + y^2), \end{cases}$ $v(x, y) = x^2 + y^2$. (*Ответ*: неустойчиво.)

3. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - xy^4, \\ \dfrac{dy}{dt} = y - x^2y^3, \end{cases}$ $v(x, y) = x^2 - y^2$. (*Ответ*: неустойчиво.)

4. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -y - 3z - x(y - 2z)^2, \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x + 3z - y(x + z)^2, \\ \dfrac{dz}{dt} = 2x - y - z, \end{cases}$ $v(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.

(*Ответ*: устойчиво.)

5. С помощью условий Рауса – Гурвица исследовать на устойчивость нулевое решение дифференциального уравнения: $y^{(4)} + 2y''' + 9y'' + y' + 4y = 0$. (*Ответ:* устойчиво асимптотически.)

Исследовать на устойчивость по первому приближению нулевое решение системы дифференциальных уравнений.

6. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x - y + 2x^2 + y^2, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - y + y^2. \end{cases}$ (*Ответ:* устойчиво асимптотически.)

7. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 7x + 2\sin y + y^4, \\ \dfrac{dy}{dt} = e^x - 3y - 1 + 3x^2. \end{cases}$ (*Ответ:* неустойчиво.)

18. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

18.1. НЕКОТОРЫЕ ПОНЯТИЯ КОМБИНАТОРИКИ. СОБЫТИЯ И ИХ ВЕРОЯТНОСТИ

Дано конечное число n объектов произвольной природы, которые назовем *элементами*. Из них по определенному правилу можно образовать некоторые группы. Подсчетом числа таких возможных групп и занимается *комбинаторика*.

Конечное множество элементов, в котором установлен порядок, называют *перестановкой*. Число возможных перестановок из n элементов

$$P_n = n\,(n-1)(n-2)\,...\,3\cdot 2\cdot 1 = n!$$

(читается «n-факториал»). Например, $P_6 = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6 = 720$.

Множество, для которого указан порядок расположения элементов, называется *упорядоченным*.

Упорядоченные конечные подмножества некоторого множества называются *размещениями*. Число A_n^m всех возможных размещений, содержащих по m элементов из множества, состоящего из n элементов ($m \le n$), определяется по формуле

$$A_n^m = n\,(n-1)\,...\,(n-m+1).$$

Например, $A_6^3 = 6\cdot 5\cdot 4 = 120$.

Всякое конечное подмножество, состоящее из m элементов данного множества из n элементов, называется *сочетанием* m элементов из n, если каждое подмножество из m элементов отличается одно от другого хотя бы одним элементом. Число всех возможных сочетаний обозначается C_n^m:

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{n(n-1)...(n-m+1)}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Для сочетаний верны формулы:

$$C_n^m = C_n^{n-m}, \quad C_n^m + C_n^{m+1} = C_{n+1}^{m+1}.$$

Например, $C_{50}^{48} = C_{50}^{2} = \dfrac{50\cdot 49}{1\cdot 2} = 1225$.

Равенство

$$(p+qx)^n = \sum_{m=0}^{n} C_n^m p^{n-m} q^m x^m \qquad (18.1)$$

называется *формулой бинома Ньютона*. Отсюда при $p = 1$, $qx = 1$ следует равенство

$$\sum_{m=0}^{n} C_n^m = 2^n .$$

Основными понятиями теории вероятностей являются случайные события и случайные величины. *Событием* называется любое явление, о котором можно сказать «произошло», «не произошло», «появилось», «не появилось» и т.п.

Событие называется *достоверным*, если оно обязательно наступает при некоторых данных условиях. Если при данных условиях событие никогда не наступает, оно называется *невозможным*. *Случайным* называют такое событие, которое в результате опыта может появиться (произойти) или не появиться (не произойти). Случайные события обозначают прописными буквами латинского алфавита: A, B, C, ... Достоверное событие обозначают буквой E, а невозможное – символом $\varnothing$.

Если появление одного события исключает появление другого, то они называются *несовместными*; в противном случае два события называются *совместными*. Например, появление решетки и герба при бросании одной монеты – события несовместные, а выпадение решетки и герба при бросании двух монет – совместные события.

Группа событий $A_1, A_2, ..., A_n$ называется *группой несовместных событий*, если совместное появление любой пары этих событий невозможно.

Если хотя бы одно событие из группы $A_1, A_2, ..., A_n$ обязательно происходит, то говорят, что эти события образуют *полную группу событий*. На практике часто рассматриваются полные группы несовместных событий. Например, при пяти выстрелах по мишени события $A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5$, означающие, что число попаданий в мишень равно 0, 1, 2, 3, 4, 5 соответственно, образуют полную группу несовместных событий.

Два события, образующих полную группу несовместных событий, называются *противоположными*. Для любого события A противоположное событие обозначается $\bar{A}$ (читается «не A»).

События называют *равновозможными*, если ни одно из них не является более возможным, чем другое.

Рассмотрим n событий $A_1, A_2, ..., A_n$. *Суммой (объединением)* этих *событий* называется событие $B = \sum_{i=1}^{n} A_i$, заключающееся в появлении хотя бы одного из событий $A_1, A_2, ..., A_n$.

Произведением (совмещением) событий $A_1, A_2, ..., A_n$ называется событие $B = \prod_{i=1}^{n} A_i$, означающее появление всех перемножаемых событий.

Разностью событий A и B называется событие C, которое означает наступление события A и ненаступление события B. Разность событий A и B обозначается $A - B$ или $A \backslash B$.

Очевидно, что $A\bar{A} = \varnothing$, $A + \varnothing = A$, $A \cdot \varnothing = \varnothing$, $A + E = E$, $AE = A$.

Если с наступлением события A появляется и событие B (A влечет за собой появление B), то это записывается в виде $A \subset B$.

Относительной частотой события A или просто *частотой*, обозначаемой $W(A)$, называется отношение числа опытов m, в которых произошло событие A, к числу всех проведенных опытов n, т.е. $W(A) = m / n$.

Перечислим *свойства частоты событий.*

1. Частота достоверного события E равна единице: $W(E) = 1$.
2. Частота невозможного события $\varnothing$ равна нулю: $W(\varnothing) = 0$.
3. Для любого случайного события A справедливо $0 \le W(A) \le 1$.
4. Частота суммы двух несовместных событий равна сумме их частот, т.е.

$$W(A + B) = W(A) + W(B).$$

5. Частота произведения двух событий равна произведению частоты одного из них и условной частоты другого:

$$W(AB) = W(A)W(B/A) = W(B)W(A/B).$$

Здесь через $W(A/B)$ обозначена частота появления события A в тех опытах, в которых наблюдалось появление события B: $W(A/B)$ называется *условной частотой события* A, вычисленной при условии появления события B. Аналогично определяется *условная частота события* B: $W(B/A)$.

Вероятностью случайного события A называется постоянное число $P(A)$, около которого группируются частоты $W(A)$ события A по мере увеличения числа опытов (*свойство устойчивости частоты*). Это определение называется *статистическим определением вероятности события.*

Испытанием называется обеспечение совокупности условий, при которых может появиться некоторое событие. Каждое событие, которое может наступить в испытании, называется *элементарным исходом испытания.* Если в результате испытания наступает единственное событие, то говорят, что осуществляется единственно возможный элементарный исход испытания.

Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n$ – полная группа равновозможных элементарных исходов испытания. При некоторых исходах событие A происходит, при других – нет. Исходы, при которых событие A происходит, называются *благоприятствующими событию A.*

Вероятностью события A называется отношение числа m элементарных исходов испытания, благоприятствующих событию A, к числу n всех единственно возможных и равновозможных, образующих полную группу элементарных исходов. Вероятность события A обозначается $P(A)$. Тогда, по определению, $P(A) = m / n$ – *классическое определение вероятности.*

Пример 1. В ящике 30 деталей, среди которых 5 бракованных. Найти вероятность того, что наугад взятая из ящика деталь окажется бракованной.

▸ Так как каждая из имеющихся деталей может быть взята из ящика, то число всех равновозможных элементарных исходов $n = 30$. Число исходов, благоприятствующих появлению бракованной детали, $m = 5$. Если событие A означает, что взятая деталь – бракованная, то $P(A) = 5/30 = 1/6$. ◂

Пример 2. На склад поступило N изделий, среди которых M бракованных. Определить вероятность того, что среди n наугад взятых со склада изделий окажется m бракованных.

▸ Так как возможности появления любой комбинации n изделий из N одинаковы, то число всех равновозможных случаев C_N^n. Число способов получения m бракованных изделий из M равно C_M^m, причем каждый набор из m бракованных изделий может быть дополнен группой из $n - m$ стандартных изделий из общего числа стандартных изделий $N - M$ ровно C_{N-M}^{n-m} способами.

Следовательно, число случаев, которые благоприятствуют событию A, означающему, что среди отобранных n изделий будет m бракованных, равно произведению $C_M^m C_{N-M}^{n-m}$. Искомая вероятность

$$P(A) = C_M^m C_{N-M}^{n-m} / C_N^n, \tag{18.2}$$

где $M \le N$; $m \le n$. ◂

Пусть число элементарных исходов, которые равновозможны и образуют полную группу событий, бесконечно. Тогда классическое определение вероятности события A, которое может произойти в данной системе исходов также бесконечное число раз, неприменимо. В этих случаях каждому из возможных исходов ставится в соответствие точка пространства, а системе всех возможных исходов – некоторая область D данного пространства. Поскольку все исходы равновозможны, то попадание в любую точку области D также равновозможно. Всем благоприятствующим исходам соответствует некоторая область $d \in D$.

Если S_d и S_D – метрические характеристики (длина, площадь, объем) областей d и D, то полагаем, что вероятность $P(A) = S_d / S_D$.

Пример 3. Два человека договорились встретиться в некоторый промежуток времени длительностью T мин, причем каждый из пришедших к месту встречи должен ждать другого не более τ мин. Найти вероятность встречи.

▸ Пусть x и y – моменты прихода каждого из встречающихся. Тогда $S_D = T^2$, D: $\{0 \le x \le T,\ 0 \le y \le T\}$ (рис. 18.1). Встреча состоится в случае, когда

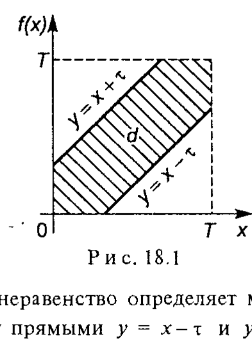


Рис. 18.1

$|y - x| \le \tau$. Последнее неравенство определяет множество точек плоскости, расположенных между прямыми $y = x - \tau$ и $y = x + \tau$ и на этих прямых. Площадь области d $S_d = T^2 - (T - \tau)^2$. Тогда искомая вероятность встречи

$$P = S_d / S_D = (T^2 - (T - \tau)^2) / T^2 = 1 - (1 - \tau / T)^2 . ◂$$

1. При перевозке ящика, в котором содержалось 21 стандартная и 10 нестандартных деталей, утеряна одна деталь. Деталь, наугад извлеченная из ящика после перевозки, оказалась стандартной. Найти вероятность того, что была утеряна: а) стандартная деталь; б) нестандартная деталь. (*Ответ:* а) 2/3; б) 1/3.)

2. В коробке шесть одинаковых пронумерованных кубиков. Найти вероятность того, что при извлечении по одному всех шести кубиков их номерá появятся в возрастающем порядке. (*Ответ:* 1/720.)

3. 1) В соревнованиях участвуют 10 равных по силе шахматистов. Сколько существует вариантов распределения мест между ними? 2) Сколько бригад по 6 человек в каждой можно составить из 12 человек? 3) Сколькими способами можно расставить 5 поездов на 8 запасных путях? (*Ответ:* 1) 3 628 800; 2) 924; 3) 6720.)

4. В ящике имеется 15 деталей, из них 10 окрашенных. Сборщик наугад извлекает из ящика 3 детали. Найти вероятность того, что извлеченные детали окажутся окрашенными. (*Ответ:* 24/91.)

5. Внутрь круга радиусом R наугад брошена точка. Найти вероятность того, что точка окажется внутри вписанного в круг: а) квадрата; б) правильного треугольника; в) правильного шестиугольника. (*Ответ:* а) $2/\pi$; б) $3\sqrt{3}/(4\pi)$; в) $3\sqrt{3}/(2\pi)$.)

6. Наугад взятый телефонный номер состоит из 5 цифр. Найти вероятность того, что в нем все цифры: а) различные; б) нечетные. (*Ответ:* а) 0,3024; б) 0,0312.)

7. Найти вероятность того, что в декабре наугад взятого года 4 воскресенья. (*Ответ:* 0,5714.)

8. Пусть N человек размещены случайным образом за круглым столом. Какова вероятность того, что два определенных человека окажутся рядом? (*Ответ:* $2/(N-1)!$.)

9. Пусть A, B, C – три случайных события. Используя операции сложения, умножения и отрицания событий, найти выражения для следующих событий: а) произошло только A; б) произошло только одно событие; в) произошло два события; г) произошли все события; д) произошло не более двух событий.

10. На отрезке OA длиной l поставлены наугад две точки B и C. Найти вероятность того, что из трех получившихся отрезков можно составить треугольник. (*Ответ:* 1/4.)

Самостоятельная работа

1. 1. Сколькими способами можно распределить первую, вторую и третью премии на конкурсе, в котором принимали участие 20 человек? (*Ответ:* 6840.)

2. Наугад взятый телефонный номер состоит из пяти цифр. Найти вероятность того, что все цифры этого номера кратны 3.

2. 1. Даны три произвольных события A, B, C. С помощью операций над событиями найти выражение для события D, означающего появление не менее двух событий.

2. На складе хранится в нерассортированном виде 20 изделий первого сорта и 10 – второго. Найти вероятность того, что среди взятых наугад пяти изделий два будут второго сорта. (*Ответ:* 0,36.)

3. 1. В книге 500 страниц. Найти частоту появления страниц с номерами, кратными 7.

2. Внутрь равностороннего треугольника со стороной a наугад брошена точка. Найти вероятность того, что она попадет в круг, вписанный в треугольник. (Предполагается, что попадание в любую точку треугольника равновозможно.) (*Ответ:* $\pi/3\sqrt{3}$.)

18.2. ОСНОВНЫЕ АКСИОМЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ. НЕПОСРЕДСТВЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ СОБЫТИЙ

Так как вероятности событий – числа, к которым стремятся частоты событий по мере увеличения количества испытаний, то вероятности событий обладают всеми свойствами частот. Эти свойства можно сформулировать в виде аксиом.

Аксиома 1. *Вероятность достоверного события равна единице, т.е.* $P(E) = 1$.

Аксиома 2. *Вероятность невозможного события равна нулю, т.е.* $P(\varnothing) = 0$.

Аксиома 3. *Вероятность любого случайного события удовлетворяет условиям* $0 \le P(A) \le 1$.

Аксиома 4. *Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме их вероятностей, т.е. если* $A \cap B = \varnothing$, *то* $P(A+B) = P(A) + P(B)$.

Вероятность наступления события A, вычисленная при условии наступления события B, называется *условной вероятностью события A по отношению к событию B* и обозначается $P(A/B)$. Аналогично определяется *условная вероятность события B по отношению к событию A*.

Аксиома 5. *Вероятность произведения (совместного наступления) двух событий равна произведению вероятности одного из них и условной вероятности другого, т.е.*

$$P(AB) = P(A)P(B/A) = P(B)P(A/B).$$

Пример 1. В урне 7 белых, 8 красных и 10 синих шаров. Найти вероятность того, что извлеченный наугад шар – цветной.

▸ Пусть событие A означает появление красного шара, а B – синего. Тогда событие $C = A + B$ означает появление цветного шара. Так как A и B – несовместные события, то $P(C) = P(A) + P(B)$. Имеем: $P(A) = 8/25$, $P(B) = 10/25$. Тогда $P(C) = 8/25 + 10/25 = 0{,}72$. ◂

Пример 2. Из 20 изделий первого сорта и 10 второго сорта, имеющихся на складе, наугад взято 2 изделия. Найти вероятность того, что оба они – первого сорта.

▸ Пусть A_1 – появление одного изделия первого сорта, A_2 – появление другого изделия первого сорта. Тогда $A = A_1A_2$ означает появление двух изделий первого сорта.

Из аксиомы 5 следует, что $P(A) = P(A_1)P(A_2/A_1)$. Но $P(A_1) = 20/30$, $P(A_2/A_1) = 19/29$. Следовательно,

$$P(A) = \frac{20}{30}\frac{19}{29} \approx 0{,}4368. \ ◂$$

Пример 3. Наугад взяты два положительных числа x и y, каждое из которых не превышает 2. Найти вероятность того, что их произведение не меньше 2, а сумма не больше 3.

▸ Так как числа x и y удовлетворяют условиям $0 \le x \le 2$ и $0 \le y \le 2$, то точки $M(x, y)$, удовлетворяющие этим условиям, образуют квадрат со стороной 2 и площадью $S_D = 4$ (рис. 18.2).

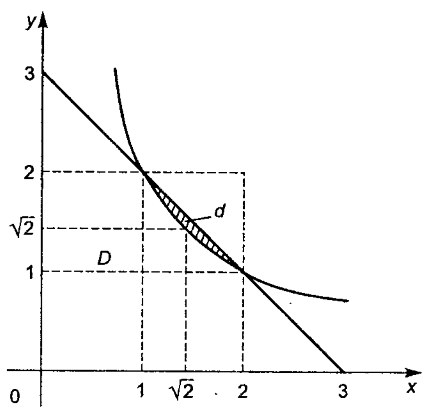


Рис. 18.2

Найдем множество точек $M(x, y)$, для которых $xy \geq 2$ и $x + y \leq 3$. Эти точки, удовлетворяющие указанной системе неравенств, образуют область d, ограниченную гиперболой $xy = 2$ и прямой $x + y = 3$ (см. рис. 18.2). Находим площадь S_d области d:

$$S_d = \iint\limits_D dx\,dy = \int\limits_1^2 dx \int\limits_{2/x}^{3-x} dy = \int\limits_1^2 (3 - x - 2/x)\,dx =$$

$$= \left(3x - x^2/2 - 2\ln|x|\right)\Big|_1^2 = 1{,}5 - \ln 4 \approx 0{,}1137\,.$$

Искомая вероятность $P = S_d/S_D = 0{,}1137/4 \approx 0{,}0284$. ◄

АЗ-18.2

1. В урне 3 белых и 5 черных шаров. Из урны наугад вынимают 2 шара. Найти вероятность того, что эти шары разного цвета. (*Ответ:* 15/28.)

2. Из ящика, в котором находится 31 стандартная и 6 нестандартных деталей, взято наугад 3 детали. Какова вероятность следующих событий: а) все три детали стандартные; б) по крайней мере одна деталь стандартная? (*Ответ:* а) 0,579; б) 0,9973.)

3. Цифровой замок содержит на общей оси 4 диска, каждый из которых разделен на 6 секторов, отмеченных цифрами. Замок может быть открыт только в том случае, когда диски занимают определенное положение относительно его корпуса и, следовательно, цифры образуют определенную комбинацию, составляющую «секрет» замка. Какова вероятность открыть замок, установив произвольную комбинацию цифр? (*Ответ:* 0,00077.)

4. Наугад взяты два положительных числа x и y, каждое из которых не превышает единицы. Найти вероятность того, что $x + y \leq 1$, а $xy \geq 0{,}09$. (*Ответ:* $\approx 0{,}2$.)

5. В партии из 20 радиоприемников 5 неисправных. Для проверки наугад отбираются 3 радиоприемника. Найти вероятность того, что в число выбранных войдут: а) только исправные радиоприемники; б) только неисправные радиоприемники; в) один неисправный и два исправных радиоприемника. (*Ответ:* а) 91/228; б) 1/114; в) 35/76.)

6. Цепь состоит из двух последовательно включенных элементов, работающих независимо друг от друга. Вероятность безотказной работы первого элемента $p_1 = 0{,}8$, а второго – $p_2 = 0{,}9$. Вычислить вероятность разрыва цепи.

7. Группа состоит из 4 мужчин и 8 женщин. Найти вероятность того, что при разбиении этой группы случайным образом на подгруппы по 3 человека в каждой из них будет хотя бы один мужчина. (*Ответ:* 41/55.)

Самостоятельная работа

1. 1. В урне 10 белых и 15 красных шаров. Найти вероятность того, что два наугад вынутых шара окажутся красными. (*Ответ:* 7/20.)

2. Какова вероятность того, что произведение очков, выпавших на двух игральных костях, равно 2? (*Ответ:* 1/18.)

2. 1. В ящике 5 изделий первого сорта, 10 – второго и 15 – третьего сорта. Найти вероятность того, что наугад взятое изделие – не третьего сорта. (*Ответ:* 0,5.)

2. Группа состоит из 4 мужчин и 8 женщин. Найти вероятность того, что при разбиении этой группы случайным образом на подгруппы по 3 человека в каждой из них будет один мужчина. (*Ответ:* 28/55.)

3. 1. В урне 4 белых и 5 красных шаров. Из урны наугад последовательно извлекаются все шары и откладываются в сторону. Найти вероятность того, что последний вынутый шар будет белым. (*Ответ:* 0,4444.)

2. Вероятность попадания в любую часть плоской треугольной пластинки пропорциональна ее площади. Найти вероятность попадания наугад брошенной на пластинку точки в треугольник, образованный средними линиями исходного треугольника. (*Ответ:* 0,25.)

18.3. ТЕОРЕМЫ СЛОЖЕНИЯ И УМНОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ. ФОРМУЛА ПОЛНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ

Теорема сложения вероятностей. *Вероятность суммы конечного числа несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий, т.е.*

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i), \qquad (18.3)$$

где $A_i A_j = \varnothing$ *при* $i \neq j$.

Если события $A_1, A_2, ..., A_n$ образуют полную группу несовместных событий, то $\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1$. В частности, события A и $\bar{A}$ образуют полную группу и несовместны, поэтому $P(A) + P(\bar{A}) = 1$. Если обозначить $P(A) \equiv p$, то $q \equiv P(\bar{A}) = 1 - p$.

Пример 1. При приемке партии из 80 изделий, среди которых 6 бракованных, проверяются 40 наугад взятых изделий. Партия изделий принимается, если среди проверяемых изделий не более двух бракованных. Определить вероятность приемки партии изделий.

▸ Пусть события A_0, A_1 и A_2 означают, что среди 40 проверяемых изделий соответственно нет бракованных, одно бракованное и два бракованных. События A_0, A_1, A_2 несовместны. Событие $A = A_0 + A_1 + A_2$ означает, что партия изделий будет принята. По теореме сложения (см. формулу (18.3)) $P(A) = P(A_0) + P(A_1) + P(A_2)$. По формуле (18.2) находим:

$$P(A_0) = C_{74}^{40}/C_{80}^{40}, \quad P(A_1) = C_{74}^{39}C_6^1/C_{80}^{40}, \quad P(A_2) = C_{74}^{38}C_6^2/C_{80}^{40}.$$

Следовательно,

$$P(A) = (C_{74}^{40} + C_{74}^{39}C_6^1 + C_{74}^{38}C_6^2)/C_{80}^{40} \approx 0,337. \blacktriangleleft$$

Теорема умножения вероятностей. *Вероятность произведения конечного числа событий равна произведению вероятности одного из них и условных вероятностей остальных событий, вычисленных при условии, что все предшествующие события произошли, т.е.*

$$P(A_1A_2 \ldots A_n) = P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1A_2) \ldots P(A_n/A_1A_2 \ldots A_{n-1}). \quad (18.4)$$

События A и B называются *независимыми*, если $P(A/B) = P(A)$. Тогда $P(B/A) = P(B)$, т.е. независимость событий взаимная. События $A_1, A_2, ..., A_n$ называются *независимыми в совокупности*, если каждое из них и любые комбинации их совместной реализации являются независимыми событиями. Для независимой в совокупности системы событий $A_1, A_2, ..., A_n$ справедливо равенство

$$P\left(\prod_{i=1}^{n} A_i\right) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i).$$

Если любые два события системы независимы, то система событий называется *попарно независимой*. Из независимости событий в совокупности следует их попарная независимость; обратное, вообще говоря, неверно.

Для любого события $A = \sum_{i=1}^{n} A_i$ противоположное событие $\bar{A} = \sum_{i=1}^{n} \bar{A}_i$, а это означает, что

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = 1 - P\left(\sum_{i=1}^{n} \bar{A}_i\right). \quad (18.5)$$

Если события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ – независимые в совокупности, то формула (18.5) принимает вид

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = 1 - \prod_{i=1}^{n} P(\bar{A}_i). \tag{18.6}$$

Теорема сложения для двух совместных событий записывается в виде

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB),$$

а для трех событий – в виде

$$P(A+B+C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC).$$

Пример 2. Вероятности попадания в цель каждого из трех стрелков равны соответственно 0,8; 0,7; 0,9. Стрелки произвели один залп. Найти вероятность: а) только одного попадания; б) хотя бы одного попадания.

▸ а) Пусть A_i, $i = \overline{1,3}$, – события, означающие попадание в цель каждого из трех стрелков. Тогда $P(A_1) = 0{,}8$, $P(A_2) = 0{,}7$, $P(A_3) = 0{,}9$, $P(\bar{A}_1) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$, $P(\bar{A}_2) = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$, $P(\bar{A}_3) = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$.

Событие A, означающее только одно попадание в мишень, записывается в виде

$$A = A_1\bar{A}_2\bar{A}_3 + \bar{A}_1 A_2 \bar{A}_3 + \bar{A}_1\bar{A}_2 A_3.$$

Так как $A_1\bar{A}_2\bar{A}_3$, $\bar{A}_1 A_2 \bar{A}_3$, $\bar{A}_1\bar{A}_2 A_3$ – несовместные события (стрелки производят выстрелы независимо друг от друга), то из теорем сложения и умножения вероятностей следует

$$P(A) = P(A_1)P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_3) + P(\bar{A}_1)P(A_2)P(\bar{A}_3) + P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)P(A_3) =$$

$$= 0{,}8 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}1 + 0{,}2 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}1 + 0{,}2 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}9 = 0{,}092.$$

б) Так как попадания в цель каждого стрелка – независимые в совокупности события, то из формулы (18.6) следует, что

$$P(A_1 + A_2 + A_3) = 1 - P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_3) = 1 - 0{,}2 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}1 = 0{,}994. \blacktriangleleft$$

Пример 3. На складе 30 изделий первого сорта и 20 – второго сорта. Найти вероятность того, что три взятых наугад изделия – первого сорта.

▸ Пусть A_1, A_2, A_3 – события, состоящие в появлении изделия первого сорта соответственно при первом, втором и третьем взятии изделия со склада. Тогда событие $A = A_1 A_2 A_3$ означает появление трех изделий первого сорта.

Из формулы (18.4) следует, что $P(A) = P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1A_2)$. Так как $P(A_1) = 30/50$, $P(A_2/A_1) = 29/49$, $P(A_3/A_1A_2) = 28/48$, то

$$P(A) = \frac{30}{50}\,\frac{29}{49}\,\frac{28}{48} \approx 0{,}2071. \blacktriangleleft$$

Пример 4. Используя условия примера 3, найти вероятность появления трех изделий первого сорта, если производится проверка качества каждого взятого изделия и его возврат на склад.

▶ В данном случае

$$P(A_1) = P(A_2/A_1) = P(A_3/A_1A_2) = 30/50 = 3/5 .$$

Тогда

$$P(A_1A_2A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3) = (3/5)^3 = 0{,}216 . ◀$$

Пусть события $H_1, H_2, ..., H_n$ образуют полную группу несовместных событий, т.е. $\sum_{i=1}^{n} H_i = E$, $H_iH_j = \varnothing$, $i \neq j$. Событие A может наступить только вместе с наступлением одного из событий $H_1, H_2, ..., H_n$, которые называются *гипотезами*. Тогда справедлива *формула полной вероятности*

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A/H_i) . \qquad (18.7)$$

Пример 5. В цехе 3 станка-автомата штампуют детали одного вида. Производительность первого станка в два раза больше, а третьего – в два раза меньше производительности второго станка. Вероятность брака для первого станка равна 0,05, для второго – 0,03, для третьего – 0,01. Изготовленные детали складываются в один ящик. Найти вероятность того, что наугад взятая из ящика деталь – бракованная.

▶ Относительно каждой взятой из ящика детали можно утверждать следующее: H_1– деталь изготовлена первым станком; H_2 – деталь изготовлена вторым станком; H_3 – деталь изготовлена третьим станком.

Так как третий станок штампует 1/7 всех деталей, второй – 2/7, то первый – 4/7 всех деталей. Поэтому $P(H_1) = 4/7$, $P(H_2) = 2/7$, $P(H_3) = 1/7$. По условию задачи $P(A/H_1) = 0{,}05$, $P(A/H_2) = 0{,}03$, $P(A/H_3) = 0{,}01$. Тогда из формулы (18.7) следует, что

$$P(A) = \frac{4}{7} \cdot 0{,}05 + \frac{2}{7} \cdot 0{,}03 + \frac{1}{7} \cdot 0{,}01 = 0{,}0385 . ◀$$

Пример 6. Электрическая цепь MN сконструирована по схеме, представленной на рис. 18.3. Все элементы *1–5* цепи работают независимо друг от дру-

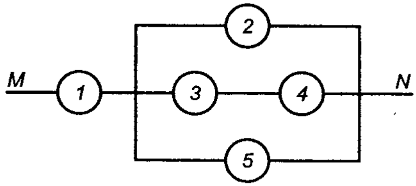


Рис. 18.3

га, и вероятности выхода их из строя за данный промежуток времени равны соответственно $p_1 = 0{,}1$, $p_2 = 0{,}2$, $p_3 = 0{,}5$, $p_4 = 0{,}3$, $p_5 = 0{,}1$. Найти вероятность нормальной работы цепи в данный промежуток времени.

▸ Пусть A_i, $i=\overline{1,5}$, – событие, означающее нормальную работу i-го элемента цепи в данный промежуток времени. Цепь исправна (событие A) в данный промежуток времени, если наступают события A_1 и $A_2+A_5+A_3A_4$. Согласно формуле (18.6) искомая вероятность

$$P(A) = P(A_1)(1-P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_5)P(\bar{B})),$$

где $\bar{B} = \bar{A}_3+\bar{A}_4$; $P(\bar{B}) = 1-P(A_3)P(A_4)$. Следовательно,

$$P(A) = P(A_1)(1-P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_5)(1-P(A_3)P(A_4))) =$$

$$= 0{,}9(1-0{,}1\cdot 0{,}2\,(1-0{,}5\cdot 0{,}7)) = 0{,}8883.$$ ◂

АЗ-18.3

1. Вероятность безотказной работы блока, входящего в некоторую систему, в течение заданного времени равна 0,8. Для повышения надежности системы устанавливается такой же резервный блок. Найти вероятность безотказной работы системы с резервным блоком в течение заданного времени. (*Ответ:* 0,96.)

2. Двадцать экзаменационных билетов содержат по два неповторяющихся вопроса. Экзаменуемый знает ответы на 35 вопросов. Найти вероятность того, что экзамен будет сдан, если для этого достаточно ответить на два вопроса одного билета или на один вопрос билета и один дополнительный вопрос из других билетов. (*Ответ:* 0,963.)

3. Для разрушения моста достаточно попадания одной авиационной бомбы. Найти вероятность того, что мост будет разрушен, если на него будет сброшено четыре бомбы, вероятности попадания которых равны соответственно 0,3; 0,4; 0,6; 0,7. (*Ответ:* 0,95.)

4. В каждой из трех урн находится 6 черных и 4 белых шара. Из первой урны наугад извлечен шар и переложен во вторую, после чего из второй урны наугад извлечен шар и переложен в третью. Найти вероятность того, что шар, наугад извлеченный из третьей урны, окажется белым. (*Ответ:* 0,4.)

5. В ящик, в котором находится n деталей, положена стандартная деталь, после чего из него наугад извлечена одна деталь. Найти вероятность того, что извлеченная деталь – стандартная, если все возможные предположения о первоначальном составе деталей в ящике равновозможны. (*Ответ:* $\frac{n+2}{2(n+1)}$.)

6. В электрическую цепь MN включены элементы α_1–α_6 по схеме, изображенной на рис. 18.4. Все элементы работают не-

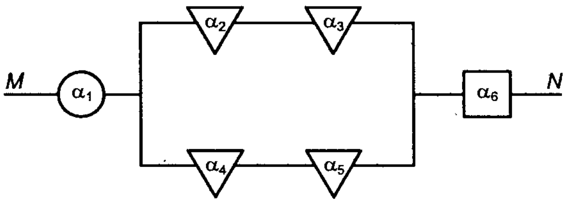


Рис. 18.4

зависимо друг от друга. Вероятности выхода из строя каждого элемента в заданный промежуток времени приведены в следующей таблице:

α_i	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6
p_i	0,3	0,1	0,4	0,5	0,2	0,6

Найти вероятность разрыва цепи за указанный промежуток времени. (*Ответ:* 0,7973.)

7. В трех урнах находятся белые и черные шары: в первой – 2 белых и 3 черных, во второй – 2 белых и 2 черных, в третьей – 3 белых и 1 черный. Из первой урны переложили шар во вторую. После этого шар из второй урны переложили в третью. И, наконец, шар из третьей урны переложили в первую. Найти вероятность того, что состав шаров во всех урнах не изменился. (*Ответ:* 0,34.)

8. Найти вероятность того, что наугад взятое двузначное число окажется кратным 2 или 5. (*Ответ:* 0,6.)

Самостоятельная работа

Участок электрической цепи MN состоит из элементов, указанных на схеме (рис. 18.5–18.7). Вероятности выхода из строя всех элементов цепи за некоторый промежуток времени даны в таблице. Вычислить вероятность разрыва цепи за этот промежуток времени.

1.

α_i	α_1	α_2	α_3	α_4
p_i	0,3	0,1	0,4	0,2

См. рис. 18.5. (*Ответ:* 0,4624.)

2.

α_i	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5
p_i	0,3	0,6	0,5	0,4	0,2

См. рис. 18.6. (*Ответ:* 0,2128.)

3.

α_i	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5
p_i	0,4	0,5	0,1	0,2	0,3

См. рис. 18.7. (*Ответ:* 0,3232.)

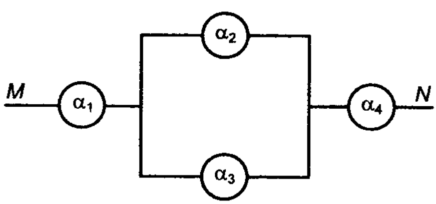


Рис. 18.5

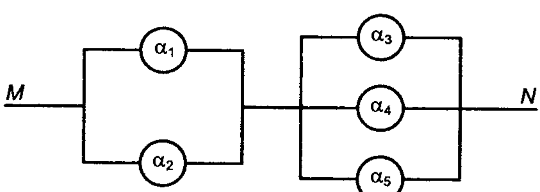


Рис. 18.6

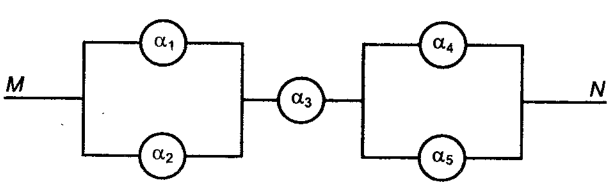


Рис. 18.7

18.4. ФОРМУЛЫ БАЙЕСА И БЕРНУЛЛИ. ЛОКАЛЬНАЯ И ИНТЕГРАЛЬНАЯ ТЕОРЕМЫ МУАВРА – ЛАПЛАСА

Если $H_1,\ H_2,\ \ldots,\ H_n$ образуют полную группу несовместных событий (гипотез) и событие A произошло, то

$$P(H_k/A) = \frac{P(H_k)P(A/H_k)}{\sum\limits_{i=1}^{n} P(H_i)P(A/H_i)}, \quad k = \overline{1, n}. \tag{18.8}$$

Формула (18.8) называется *формулой Байеса*. Она дает возможность находить условные *апостериорные* (после опыта) *вероятности* гипотез $P(H_k/A)$ по известным *априорным* (до опыта) *вероятностям* $P(H_i)$ гипотез $H_1,\ H_2,\ \ldots,\ H_n$ и данным $P(A/H_i)$.

Пример 1. На склад поступает продукция с трех фабрик. Поступления с первой фабрики составляют 20 %, со второй – 46 %, с третьей – 34 %. Вероятность брака для первой фабрики равна 0,03, для второй – 0,02, для третьей – 0,01. Найти вероятность того, что в случае, когда взятое наугад изделие нестандартно, оно произведено на первой фабрике.

▸ Известно, что любое изделие, находящееся на складе, произведено на первой фабрике (H_1), на второй фабрике (H_2) или на третьей фабрике (H_3). Система гипотез H_1, H_2, H_3 является полной группой несовместных событий. По условию $P(H_1) = 0{,}2$, $P(H_2) = 0{,}46$, $P(H_3) = 0{,}34$, $P(A/H_1) = 0{,}03$, $P(A/H_2) = 0{,}02$, $P(A/H_3) = 0{,}01$. Необходимо найти вероятность гипотезы H_1 при условии, что взятое наугад изделие (событие A) оказалось нестандартным. Согласно формуле Байеса имеем:

$$P(H_1/A) = \frac{P(H_1)P(A/H_1)}{P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) + P(H_3)P(A/H_3)} =$$

$$= \frac{0{,}2 \cdot 0{,}03}{0{,}2 \cdot 0{,}03 + 0{,}46 \cdot 0{,}02 + 0{,}34 \cdot 0{,}01} \approx 0{,}322. ◂$$

Если вероятность появления события A в каждом испытании не зависит от исходов других испытаний, то такие испытания называются *независимыми относительно события A*.

Пусть проводится n одинаковых независимых испытаний, в каждом из которых событие A появляется с вероятностью p. Тогда вероятность того, что оно появится m раз $(0 \le m \le n)$, вычисляется по формуле

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}, \tag{18.9}$$

где $q = 1 - p$. Формула (18.9) называется *формулой Бернулли*.

Пример 2. В каждом из пяти опытов событие A может появиться с вероятностью $p = 0{,}4$. Найти вероятность того, что событие A появится три раза.

▸ Согласно формуле Бернулли имеем:

$$P_5(3) = C_5^3 \cdot 0{,}4^3 \cdot 0{,}6^2 \approx 0{,}0922 \text{ . ◂}$$

Локальная теорема Муавра — Лапласа. *Вероятность того, что в n независимых испытаниях событие A наступит ровно m раз,*

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x), \qquad (18.10)$$

где $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$; $x = \frac{m-np}{\sqrt{npq}}$; *$p$ — вероятность наступления события A в отдельном испытании; $q = 1 - p$. Равенство (18.10) тем точнее, чем больше n и чем p ближе к* 0,5.

Функция $\varphi(x)$ – четная; ее значения для $x \geq 0$ приведены в прил. 3.

Пример 3. Найти вероятность того, что в 243 испытаниях событие A наступит ровно 70 раз, если вероятность появления этого события в каждом испытании равна $p = 0{,}25$.

▸ По условию $n = 243$, $m = 70$, $p = 0{,}25$, $q = 0{,}75$. Тогда

$$x = \frac{m-np}{\sqrt{npq}} = \frac{70 - 243 \cdot 0{,}25}{\sqrt{243 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}75}} \approx 1{,}37 .$$

Далее из прил. 3 находим $\varphi(1{,}37) = 0{,}1561$. Согласно формуле (18.10) имеем:

$$P_{243}(70) = \frac{1}{6{,}75} \cdot 0{,}1561 \approx 0{,}0231 \text{ . ◂}$$

Интегральная теорема Муавра — Лапласа. *Пусть вероятность появления события A в каждом из n независимых испытаний равна p. Тогда вероятность того, что в n независимых испытаниях оно появится от m_1 до m_2 раз ($m_2 \geq m_1$), выражается формулой*

$$P_n(m_1 \leq m \leq m_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \qquad (18.11)$$

где

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-t^2/2}dt; \quad x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}; \quad x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}} .$$

Функция Лапласа $\Phi(x)$ – нечетная; ее значения приведены в прил. 4. Для значения $x > 5$ полагают $\Phi(x) = 0{,}5$.

Пример 4. Фабрика выпускает 70 % продукции первого сорта. Чему равна вероятность того, что в партии из 1000 изделий число изделий первого сорта будет заключено между 652 и 760?

▸ По условию задачи $n = 1000$, $p = 0{,}7$, $q = 0{,}3$, $m_1 = 652$, $m_2 = 760$.

Искомую вероятность вычислим по формуле (18.11):

$$P_{1000}(652 \leq m \leq 760) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1) .$$

Имеем:

$$x_1 = \frac{652 - 1000\cdot 0,7}{\sqrt{1000\cdot 0,7\cdot 0,3}} \approx -3,31\ ,\quad x_2 = \frac{760 - 1000\cdot 0,7}{\sqrt{1000\cdot 0,7\cdot 0,3}} \approx 4,14\ .$$

Из прил. 4 находим: Φ (4,14) = 0,49998, Φ (–3,31) = –0,49981. Следовательно, искомая вероятность $P_{1000}(652 < m < 760) = 0{,}99979$. ◀

З а м е ч а н и е 1. Если в некоторой серии из n испытаний событие A наступает m раз, то частота его появления $W(A) = m/n$. Тогда неравенство $|W(A) - p| < \varepsilon$ равносильно неравенствам $np - n\varepsilon \le m \le np + n\varepsilon$, а из интегральной теоремы Муавра – Лапласа следует

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right), \tag{18.12}$$

где p – вероятность появления события A в одном испытании; $\varepsilon > 0$ – любое действительное число.

Пример 5. Вероятность появления события A в каждом испытании равна 0,2. Найти наименьшее число испытаний n, при котором с вероятностью 0,97 можно утверждать, что относительная частота события $W(A)$ отклонится от вероятности его появления p по абсолютной величине не более чем на 0,01.

▶ Имеем: $p = 0{,}2$, $q = 0{,}8$, $\varepsilon = 0{,}01$, $(|W(A) - p| < 0{,}01) = 0{,}97$. Определим n из формулы (18.12):

$$2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) = 0,97\ ,\quad \Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) = 0,485\ .$$

Из прил. 4 находим:

$$\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}} = 2,17\ ,\quad n \approx \left(\frac{2,17^2 pq}{\varepsilon^2}\right) \approx 7534\ . ◀$$

З а м е ч а н и е 2. Число m_0, удовлетворяющее неравенствам $P_n(m_0 - 1) \le P_n(m_0) \le P_n(m_0 + 1)$, называется *наивероятнейшим числом появления события A в n независимых испытаниях*. Это число удовлетворяет условиям $np - q \le m_0 \le np + p$. Например, если посеять 1000 семян, вероятность всхода каждого из которых равна 0,83, то наиболее вероятно, что число m_0 взошедших семян удовлетворяет неравенствам $830 - 0,17 \le m_0 \le 830 + 0,83$, т.е. наивероятнейшее число взошедших семян $m_0 = 830$.

АЗ-18.4

1. Вероятности попадания в цель при каждом выстреле для трех стрелков равны соответственно 0,2; 0,4; 0,6. При одновременном выстреле всех трех стрелков в мишени обнаружено одно попадание. Найти вероятность того, что в цель попал первый стрелок. (*Ответ:* 0,103.)

2. В канцелярии работают 4 секретаря, которые обрабатывают по 40, 10, 30 и 20 % исходящих документов за одно и то же время. Вероятности неверной адресации документов секретарями равны соответственно 0,01; 0,04; 0,06; 0,01. Найти вероятность того, что один из документов, оказавшийся неверно адресованным, отправлен третьим секретарем. (*Ответ:* 0,643.)

3. Вероятность брака изделия на некотором производстве $p = 0,3$. Найти вероятность того, что среди 4 отобранных для проверки изделий будет 2 бракованных. (*Ответ:* 0,2646.)

4. По данным ОТК завода, 0,8 всего объема выпускаемых изделий – первого сорта. Найти вероятность того, что среди взятых наугад для проверки 400 изделий 80 будет не первого сорта. (*Ответ:* 0,04986.)

5. Вероятность появления события A в каждом из 2100 независимых испытаний равна 0,7. Найти вероятность того, что событие A наступит: а) не менее 1470 и не более 1500 раз; б) не менее 1470 раз; в) не более 1469 раз. (*Ответ:* а) 0,4236; б) 0,5; в) 0,5.)

6. Вероятность изготовления изделий первого сорта на данном предприятии равна 0,78. Чему равно наивероятнейшее число изделий первого сорта в случайно отобранной партии из 150 изделий? (*Ответ:* 117.)

7. Вероятность того, что деталь – нестандартная, равна 0,1. Сколько деталей нужно отобрать, чтобы с вероятностью 0,9544 можно было утверждать, что относительная частота появления нестандартных деталей отклонится от вероятности $p = 0,1$ по абсолютной величине не более чем на 0,03? (*Ответ:* 400.)

8. Для человека, достигшего 20-летнего возраста, вероятность смерти на 21-м году равна 0,006. В случае смерти страховое учреждение выплачивает 500 у.е. Застрахована группа в 10 000 человек 20-летнего возраста. Какую минимальную сумму страховых взносов следует установить, чтобы вероятность того, что к концу года страховое учреждение окажется в убытке, была не больше 0,1? (*Ответ:* 3,5 у.е.)

Самостоятельная работа

1. Два охотника одновременно стреляют в цель. Известно, что вероятность попадания для первого охотника равна 0,2, а для второго – 0,6. В результате произошло одно попадание в цель. Найти вероятность того, что первый охотник промахнулся. (*Ответ:* 0,857.)

2. Вероятность изготовления детали первого сорта на данном станке равна 0,4. Найти вероятность того, что среди наугад взятых 26 деталей половина окажется первого сорта. (*Ответ:* 0,093.)

3. Вероятность появления события в каждом из 100 независимых испытаний равна $p = 0{,}8$. Найти вероятность того, что событие появится не менее 75 раз и не более 90 раз. (*Ответ:* 0,8882.)

18.5. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ. ОБЩИЕ ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Величина, принимающая заранее не известные случайные значения, называется *случайной величиной* (СВ). Условимся обозначать случайные величины прописными буквами латинского алфавита X, Y, Z, U, ..., а значения, принимаемые ими, – соответствующими строчными буквами x, y, z, u, ...

Случайная величина, которая имеет конечное или бесконечное счетное множество значений, называется *дискретной СВ.* Например, СВ X, означающая число попаданий в цель при пяти выстрелах, может принимать значения $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. Она является дискретной. Если СВ X принимает любые значения из некоторых интервалов или отрезков числовой оси, то она называется *непрерывной СВ* (например, ошибка измерения, дальность полета снаряда, время безотказной работы прибора и т.д.).

Всякое соотношение, устанавливающее связь между возможными значениями СВ и их вероятностями, называют *законом распределения случайной величины.*

Простейшей формой задания закона распределения дискретной СВ X является таблица, в которой перечислены возможные значения этой СВ и указаны соответствующие им вероятности:

x_i	x_1	x_2 ... x_n	
p_i	p_1	p_2 ... p_n	$\sum\limits_{i=1}^{n} p_i = 1$

Такая таблица называется *рядом распределения СВ*, если $x_1 < x_2 < ... < x_n$.

Пример 1. Стрельба по мишени ведется до первого попадания. Записать ряд распределения СВ X, означающей число выстрелов, если вероятность попадания при каждом выстреле равна p.

▶ Случайная величина X может принимать бесконечное число значений $x = 1, 2, ..., n, ...$. Найдем их вероятности. По условию $P(X = 1) = p$. Стрельба закончится на n-м выстреле, если результатами первых $n - 1$ выстрелов были промахи, а n-го выстрела – попадание. Тогда событие A, означающее n указанных выстрелов, представимо в виде $A = \bar{A}_1\bar{A}_2 \ldots \bar{A}_{n-1}A_n$. Его вероятность $P(A) = P(X = n) = q^{n-1}p$, где $q = 1 - p$. Ряд распределения СВ X имеет следующий вид:

x_i	1	2	3	...	k	$k+1$	...
p_i	p	qp	q^2p	...	$q^{k-1}p$	q^kp	...

Рассмотренное в примере 1 распределение СВ называется *геометрическим.*

Функция $F(x) = P(X < x)$, задающая вероятность неравенства $X < x$, называется *интегральной функцией распределения* и обладает следующими свойствами:

1) $0 \le F(x) \le 1$;

2) $F(x_1) \le F(x_2)$ при $x_1 < x_2$;

3) $P(\alpha \le X \le \beta) = F(\beta) - F(\alpha)$;

4) $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$.

Справедливо следующее утверждение: *всякая функция $F(x)$, удовлетворяющая условиям 1–4, является интегральной функцией распределения некоторой СВ X.*

Для дискретной СВ X, заданной рядом распределения, интегральная функция распределения имеет вид

$$F(x) = \sum_{x_i < x} P(X = x_i).$$

Если возможные значения СВ X принадлежат конечному отрезку $[a; b]$, то $F(x) = 0$ при $x \le a$ и $F(x) = 1$ при $x \ge b$. Величина $b - a$ называется *размахом* СВ X. Если $F(x)$ и $F'(x)$ – непрерывные функции, то СВ X называется *непрерывной.*

Очевидно, что для любой СВ $P(X = x_0) = F(x_0 + 0) - F(x_0 - 0)$. Для непрерывной СВ $P(X = x_0) = 0$.

Пример 2. Дан ряд распределения дискретной СВ X:

x_i	2	4	6	8
p_i	0,1	0,3	0,4	0,2

Построить график интегральной функции распределения для СВ X.

▶ По определению функции $F(x)$ и аксиоме 3 вероятности суммы несовместных событий

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 2, \\ 0{,}1 & \text{при } 2 < x \le 4, \\ 0{,}4 & \text{при } 4 < x \le 6, \\ 0{,}8 & \text{при } 6 < x \le 8, \\ 1{,}0 & \text{при } 8 < x. \end{cases}$$

График функции $F(x)$ изображен на рис. 18.8. ◀

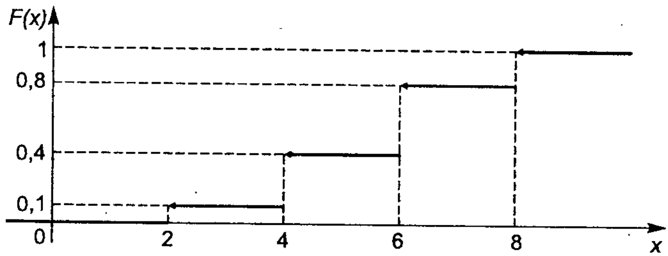


Рис. 18.8

Пример 3. Задана интегральная функция распределения непрерывной СВ X:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 1, \\ a(x-1)^3 & \text{при } 1 \le x \le 3, \\ 1 & \text{при } x > 3. \end{cases}$$

Найти коэффициент a, построить график функции $F(x)$ и вычислить $P(1 \le x \le 2)$.

▶ Из непрерывности функции $F(x)$ и свойства 4 следует, что $\lim\limits_{x \to 3} (a(x-1)^3) = 1$, откуда $a = 1/8$. Тогда

$$P(1 \le x \le 2) = F(2) - F(1) = \frac{1}{8}(2-1)^3 - \frac{1}{8}(1-1)^3 = 1/8.$$

График функции $F(x)$ приведен на рис. 18.9. ◀

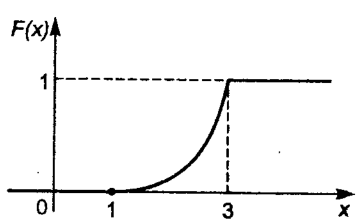


Рис. 18.9

Плотностью распределения вероятностей СВ X в точке x или *дифференциальной функцией распределения* $f(x)$ называется предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(x < X < x + \Delta x)}{\Delta x} = f(x). \qquad (18.13)$$

Из свойства 3 интегральной функции распределения $F(x)$ и формулы (18.13) следует, что

$$f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = F'(x)$$

(предполагается, что $F'(x)$ существует).

Для дискретной СВ интегральная функция распределения $F(x)$ – кусочно-постоянная, а плотность распределения вероятностей

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} p_i \delta(x - x_i),$$

где $\delta = \delta(x)$ – *функция Дирака*, которая по определению равна 0 при $x \neq 0$ и $+\infty$ при $x = 0$.

Перечислим *свойства плотности распределения вероятностей*:

1) $f(x) \geq 0$ для любого $x \in \mathbf{R}$;

2) $P(a < X < b) = \int\limits_a^b f(x)\,dx$;

3) $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$;

4) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$.

Пример 4. Случайная величина X распределена с плотностью $f(x) = a \sin 2x$, $0 \leq x \leq \pi/2$, и $f(x) = 0$ при $x < 0$ и $x > \pi/2$. Найти коэффициент a, функцию $F(x)$, вычислить $P(0 \leq X \leq \pi/4)$ и построить графики функций $f(x)$ и $F(x)$.

▸ Из свойства 4 плотности распределения вероятностей имеем:

$$\int\limits_0^{\pi/2} a \sin 2x\,dx = 1,$$

откуда $-\frac{a}{2} \cos 2x\Big|_0^{\pi/2} = 1$, $a = 1$. Из свойства 3 плотности распределения вероятностей следует, что

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ (1-\cos 2x)/2 & \text{при } 0 \le x < \pi/2, \\ 1 & \text{при } x \ge \pi/2. \end{cases}$$

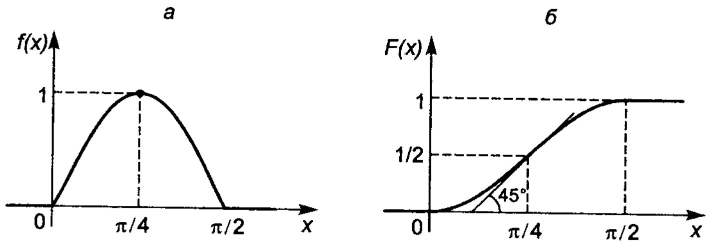


Рис. 18.10

Из свойства 2 плотности распределения вероятностей находим, что

$$P(0 \le X \le \pi/4) = \int_0^{\pi/4} \sin 2x\,dx = -\frac{1}{2}\cos 2x\Big|_0^{\pi/4} = \frac{1}{2}.$$

Графики функций $f(x)$ и $F(x)$ приведены на рис. 18.10, *а* и *б* соответственно. ◄

АЗ-18.5

1. Построить ряд распределения дискретной СВ X, означающей число выпадений герба при пяти бросаниях монеты.

2. В партии из 10 деталей 8 стандартных. Наугад взято 2 детали. Составить ряд распределения СВ X, означающей число стандартных деталей среди выбранных.

3. Дискретная СВ X распределена по закону

x	1	2	3	4
p	0,1	0,2	0,4	0,3

Найти функцию распределения $F(x)$ и построить ее график.

4. Известно, что $F(x) = ax^2$ при $x \in [0; 2]$ и $F(x) = 0$ при $x < 0$. Найти коэффициент a, функцию $f(x)$, вероятность попадания СВ X на отрезок $[1; 2]$. Построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$. (*Ответ:* $P(1 \le X \le 2) = 0{,}75$.)

5. Плотность распределения вероятностей $f(x) = c/(1+x^2)$ при $x \geq 0$ и $f(x) = 0$ при $x < 0$. Найти коэффициент c, функцию $F(x)$, значение $P(0 < X < 1)$ и построить графики функций $f(x)$ и $F(x)$. (*Ответ:* $c = 2/\pi$, $P(0 < X < 1) = 0{,}5$.)

Самостоятельная работа

1. Ряд распределения дискретной СВ X имеет вид

x_i	3	4	7	10
p_i	0,2	0,1	0,4	0,3

Найти функцию $F(x)$ и построить ее график, вычислить $P(3 < X < 8)$. (*Ответ:* $P(3 < X < 8) = 0{,}5$.)

2. Случайная величина X принимает значения $x = n$, $n = 1$, 2, ..., с вероятностью $P(X = n) = 2^{-n}$. Найти функцию $F(x)$, построить ее схематический график и вычислить $P(3 \leq X \leq 6)$. (*Ответ:* $P(3 \leq X \leq 6) = 0{,}2344$.)

3. Случайная величина X имеет плотность распределения вероятностей $f(x) = c$ при $x \in [1; 5]$ и $f(x) = 0$ при $x \notin [1; 5]$. Найти число c, функцию $F(x)$ и вычислить $P(2 \leq X \leq 4)$. (*Ответ:* $P(2 \leq X \leq 4) = 0{,}5$.)

18.6. ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Пусть дискретная СВ X принимает значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$ с вероятностями $p_1, p_2, \ldots, p_n$ соответственно. Тогда *математическим ожиданием* или *средним значением* СВ X называется число

$$M(X) = m_x = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i .$$

В случае, когда $n \to +\infty$, предполагается, что полученный числовой ряд абсолютно сходится.

Если непрерывная СВ X имеет плотность распределения вероятностей $f(x)$, то

$$M(X) = m_x = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,dx.$$

Перечислим *основные свойства математического ожидания.*

1. Математическое ожидание числа появлений события A в одном испытании равно вероятности p наступления этого события.

2. $M(C) = C$, если C – постоянное (неслучайное) число.

3. $M(CX) = CM(X)$, т.е. постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания.

4. $M(X+Y) = M(X) + M(Y)$.

5. $M(XY) = M(X)M(Y)$, если случайные величины X и Y независимы.

Пример 1. Дан ряд распределения СВ X:

x_i	2	4	7	9	11
p_i	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

Вычислить математическое ожидание $M(X)$.

▸ По определению имеем:

$$m_x = 2 \cdot 0,1 + 4 \cdot 0,2 + 7 \cdot 0,4 + 9 \cdot 0,2 + 11 \cdot 0,1 = 6,7. ◂$$

Пример 2. В каждом из n независимых испытаний событие A появляется с вероятностью p. Найти математическое ожидание СВ X – числа появлений события A в n испытаниях.

▸ Пусть X_i – число появлений события A в каждом из n независимых испытаний ($i = \overline{1, n}$). Тогда

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i. \tag{18.14}$$

Случайная величина X_i принимает значения 1 и 0 с вероятностями соответственно p и q. Тогда $M(X_i) = 1 \cdot p + 0 \cdot q = p$. Так как испытания независимы, то из равенства (18.14) на основании свойства 4 математического ожидания получаем:

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n} M(X_i) = \sum_{i=1}^{n} p = np. ◂$$

Для любой СВ X случайная величина $\overset{0}{X} = X - m_x$ называется *центрированной СВ* или *отклонением.*

Дисперсией или *рассеянием* $D(X)$ СВ X называют математическое ожидание квадрата отклонений, т.е. $D(X) = M((X - m_x)^2)$.

Величина $\sigma_x = \sqrt{D(X)}$ называется *средним квадратичным отклонением СВ X*.

Для непрерывной СВ X

$$D(X) = M\left((\overset{0}{X})^2\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x)^2 f(x)\, dx,$$

для дискретной СВ X

$$D(X) = M\left((\overset{0}{X})^2\right) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - m_x)^2 p_i.$$

Перечислим *основные свойства дисперсии*:

1) $D(X) = M(X^2) - m_x^2$;

2) $D(C) = 0$, если C – постоянная величина;

3) $D(CX) = C^2 D(X)$, если C – постоянная величина;

4) дисперсия суммы конечного числа независимых случайных величин равна сумме их дисперсий, в частности $D(X \pm Y) = D(X) + D(Y)$.

Пример 3. Найти дисперсию числа X появлений события A в n независимых испытаниях, если вероятность появления A в каждом испытании равна p.

▸ Если X_i, $i = \overline{1, n}$, – число появлений события A в каждом испытании, то $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$, и, согласно свойству 4 дисперсии, получим:

$$D(X) = \sum_{i=1}^{n} D(X_i).$$

В примере 2 установлено, что $M(X_i) = p$. Поэтому $M(X^2) = 1 \cdot p + 0 \cdot q = p$. Тогда по свойству 1 дисперсии находим:

$$D(X_i) = 1 \cdot p - p^2 = pq, \quad D(X) = npq. \blacktriangleleft$$

Пример 4. Найти значения $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$ для СВ X, интегральная функция распределения которой

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{4}x^3 & \text{при } 0 \le x \le 2, \\ 1 & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

▸ Находим плотность распределения вероятностей:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x<0 \text{ и } x>2, \\ \frac{3}{2}x - \frac{3}{4}x^2 & \text{при } 0 \le x \le 2. \end{cases}$$

Далее последовательно вычисляем:

$$M(X) = \int_0^2 xf(x)\,dx = \int_0^2 x\left(\frac{3}{2}x - \frac{3}{4}x^2\right)dx = \left(\frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{16}x^4\right)\Big|_0^2 = 1,$$

$$M(X^2) = \int_0^2 x^2 f(x)\,dx = \int_0^2 x^2\left(\frac{3}{2}x - \frac{3}{4}x^2\right)dx = \left(\frac{3}{8}x^4 - \frac{3}{20}x^5\right)\Big|_0^2 = 1{,}2.$$

Согласно свойству 1 дисперсии получаем: $D(X) = M(X^2) - M(X)^2 = 0{,}2$. По определению $\sigma(X) = \sqrt{D(X)} \approx 0{,}447$. ◄

Если математическое ожидание СВ X является характеристикой ее положения, средним значением, около которого группируются значения случайной величины, то дисперсия и среднее квадратичное отклонение являются характеристиками рассеяния СВ около математического ожидания. Для более подробного описания свойств СВ X рассмотрим также некоторые другие ее характеристики.

Модой M_0 *дискретной СВ* X называется ее наиболее вероятное значение. *Модой непрерывной СВ* X называется такое ее значение M_0, для которого $f(M_0) = \max f(x)$.

Медианой СВ X называется такое ее значение M_e, для которого $P(X < M_e) = P(X > M_e)$.

В случае симметричного распределения СВ мода и медиана совпадают с ее математическим ожиданием.

Числовыми характеристиками распределения СВ X являются также *начальные* $\alpha_k = M(X^k)$ и *центральные* $\mu_k = M\left((\overset{0}{X})^k\right) = M((X - m_x)^k)$ *моменты порядка* k, $k = 1, 2, 3, \ldots$. Очевидно, что $\alpha_1 = M(X)$ и $\mu_2 = D(X)$. Число $A_x = \mu_3/\sigma_x^3$ называется *коэффициентом асимметрии* и характеризует асимметрию распределения СВ X; число $E_x = \mu_4/\sigma_x^4 - 3$ называется *эксцессом* и характеризует островершинность графика плотности распределения вероятностей $f(x)$. Для нормального закона распределения СВ X (см. § 18.7) имеем $E_x = 0$. Графические иллюстрации моды, медианы, асимметрии и эксцесса даны на рис. 18.11–18.14 соответственно. (На рис. 18.11, 18.12 площади заштрихованных областей $S_1 = S_2 = 0{,}5$ кв. ед.)

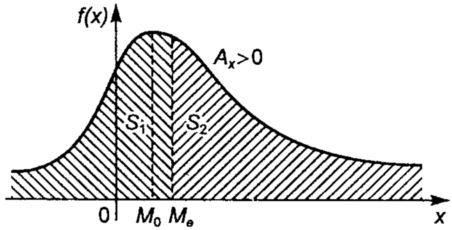


Рис. 18.11

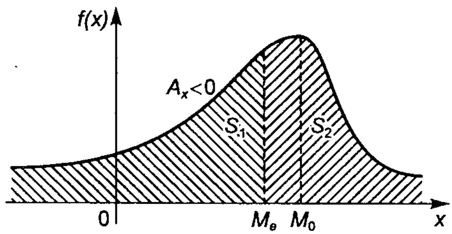


Рис. 18.12

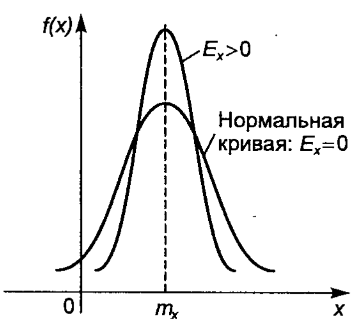


Рис. 18.13

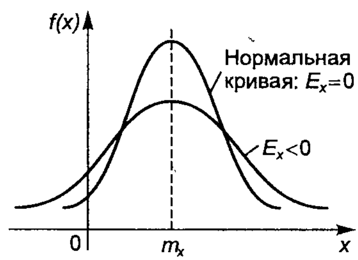


Рис. 18.14

АЗ-18.6

1. В денежной лотерее на 200 выпущенных билетов предусматривается 1 выигрыш в размере 200 у.е., 1 выигрыш – 50 у.е. и 5 – по 1 у.е. Найти среднюю величину выигрыша на один купленный билет. (*Ответ:* 1,275 у.е.)

2. Плотность распределения вероятностей СВ X

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 0,\ x > 4, \\ x/8 & \text{при } 0 < x \le 4. \end{cases}$$

Вычислить $M(X)$. (*Ответ:* 8/3.)

3. Вероятность попадания в цель при каждом из выстрелов равна p. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение для числа выстрелов по мишени до первого попадания. (*Ответ:* $m_x = 1/p$, $D(X) = q/p^2$.)

4. Из урны, содержащей 3 белых и 5 черных шаров, извлекают 3 шара. Пусть X – число вынутых черных шаров. Построить ряд распределения СВ X и найти ее математическое ожидание. (*Ответ:* $m_x = 1{,}9$.)

5. Доказать, что математическое ожидание любой СВ заключено между наименьшим и наибольшим ее возможными значениями.

6. Дан ряд распределения СВ X:

x_i	– 5	2	3	4
p_i	0,4	0,3	0,1	0,2

Вычислить математическое ожидание m_x, дисперсию $D(X)$ и среднее квадратичное отклонение σ_x. (*Ответ:* $m_x = -0{,}3$, $D(X) = 15{,}21$, $\sigma_x = 3{,}9$.)

7. Дискретная СВ X принимает два значения: x_1 и x_2, причем $x_1 < x_2$. Вероятность того, что СВ X примет значение x_1, равна 0,2. Найти закон распределения СВ X, зная математическое ожидание $M(X) = 2{,}6$ и среднее квадратичное отклонение $\sigma(X) = 0{,}8$.

(*Ответ:*

x	1	3
p	0,2	0,8

.)

8. Плотность распределения вероятностей СВ X $f(x) = A\sin x$ при $0 < x \le \pi$ и $f(x) = 0$ при $x \le 0$ и $x > \pi$. Вычислить значение A, математическое ожидание m_x и дисперсию $D(X)$. (*Ответ:* $A = 0{,}5$, $m_x = \pi/2$, $D(X) = \pi^2/4 - 2$.)

Самостоятельная работа

1. 1. Дан ряд распределения СВ X:

x_i	0	1	2	3	4	5
p_i	0,2373	0,3955	0,2637	0,0879	0,0146	0,0010

Вычислить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение СВ X. (*Ответ:* $m_x = 1{,}25$, $D(X) = 0{,}938$, $\sigma_x = 0{,}968$.)

2. Дана плотность распределения вероятностей СВ X: $f(x) = \frac{1}{2}\cos x$ при $|x| \le \pi/2$ и $f(x) = 0$ при $|x| > \pi/2$. Вычислить математическое ожидание и дисперсию СВ X. (*Ответ:* $m_x = 0$, $D(X) = (\pi^2 - 8)/4$.)

2. 1. Дан ряд распределения СВ X:

x_i	2	4	8
p_i	0,1	0,5	0,4

Вычислить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение СВ X. (*Ответ:* $m_x = 5{,}4$, $D(X) = 2{,}2$, $\sigma_x = 1{,}5$.)

2. Дана плотность распределения вероятностей СВ X: $f(x) = 2x$ при $0 \le x \le 1$ и $f(x) = 0$ при $x < 0$ и $x > 1$. Вычислить математическое ожидание и дисперсию СВ X. (*Ответ:* $m_x = 2/3$, $D(X) = 1/18$.)

3. 1. Дан ряд распределения СВ X:

x_i	3	5	7	9
p_i	0,2	0,1	0,4	0,3

Вычислить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение СВ X. (*Ответ:* $m_x = 6{,}6$, $D(X) = 4{,}64$.)

2. Дана плотность распределения вероятностей СВ X: $f(x) = 0$ при $x < 1$ и $f(x) = 3/x^4$ при $x \ge 1$. Вычислить математическое ожидание и дисперсию СВ X. (*Ответ:* $m_x = 1{,}5$, $D(X) = 0{,}75$.)

18.7. ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Биномиальный закон распределения. Пусть в каждом из n независимых испытаний событие A появляется с вероятностью p. Тогда СВ X, означающая число появлений события A в n независимых испытаниях, может принимать значения 0, 1, 2, ..., n с вероятностями

$$P_n(X=m) = C_n^m p^m q^{n-m} . \qquad (18.15)$$

Такое распределение СВ X называется *биномиальным*. В этом случае $m_x = np$, а $D(X) = npq$.

Пример 1. Устройство состоит из трех независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого элемента равна 0,1. Записать закон распределения числа отказавших элементов устройства, иайти математическое ожидание и дисперсию.

▸ Дискретная СВ X может принимать значения $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, $x_4 = 3$ (соответственно все элементы работают, один элемент отказал, два элемента отказали, отказали все три элемента). Так как $n = 3$, $p = 0{,}1$, $q = 0{,}9$, то по формуле Бернулли находим:

$$P_3(0) = q^3 = 0{,}729 , \quad P_3(1) = C_3^1 pq^2 = 3 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9^2 = 0{,}343 ,$$

$$P_3(2) = C_3^2 p^2 q = 3 \cdot 0{,}1^2 \cdot 0{,}9 = 0{,}027 , \quad P_3(3) = (0{,}1)^3 = 0{,}001 .$$

Искомый биномиальный закон распределения СВ X имеет вид:

x	0	1	2	3
p	0,729	0,343	0,027	0,001

Математическое ожидание $m_x = np = 3 \cdot 0{,}1 = 0{,}3$, а дисперсия $D(x) = npq = 3 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9 = 0{,}27$. ◂

Распределение Пуассона. Если число испытаний велико, а вероятность p появления события A мала, то используют приближенную формулу

$$P_n(m) \approx \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!} , \qquad (18.16)$$

где m – число появлений события A в n независимых испытаниях; $\lambda = np$. Такое распределение случайной величины называется *распределением Пуассона.*

Для распределения Пуассона $M(X) = D(X) = \lambda$. Закону распределения Пуассона обычно подчинена случайная величина, задающая простейший поток событий (число вызовов скорой помощи, число вызовов на АТС, число заказов на предприятии бытовых услуг и т.д.).

Если интенсивность потока λ выражает число появлений события за единицу времени, то вероятность наступления k событий за время t определяется *формулой Пуассона*

$$P_t(k) = \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}.$$

Для упрощения вычислений по формуле (18.16) и формуле Пуассона имеется специальная таблица (см. прил. 5).

Пример 2. Станок изготавливает за смену 100 000 деталей. Вероятность изготовления бракованной детали $p = 0{,}0001$. Найти вероятность того, что за смену будет изготовлено 5 бракованных деталей.

▶ По условию $n = 100\,000$, $p = 0{,}0001$, $m = 5$. Так как появления бракованных деталей независимы, n велико, а вероятность p мала, следует воспользоваться распределением Пуассона (18.16), в котором $\lambda = np = 100\,000 \cdot 0{,}0001 = 10$. Искомая вероятность

$$P_{100\,000}(5) = \frac{10^5 e^{-10}}{5!} \approx 10^5 \cdot 0{,}000045/120 \approx 0{,}0378. \blacktriangleleft$$

Равномерное распределение. Если СВ X принимает все значения $x \in [a;\, b]$ с постоянной плотностью распределения вероятностей $C = 1/(b-a)$, то говорят, что СВ X *распределена равномерно на отрезке* $[a;\, b]$. Плотность равномерно распределенной СВ X

$$f(x) = \begin{cases} 1/(b-a) & \text{при } a \le x \le b, \\ 0 & \text{при } x < a,\ x > b. \end{cases}$$

Для равномерного распределения

$$m_x = (a+b)/2, \quad D(X) = (b-a)^2/12.$$

Показательное распределение. Пусть плотность распределения вероятностей СВ X задана функцией

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{при } x \ge 0,\ \lambda > 0. \end{cases}$$

Тогда СВ X распределена по показательному (экспоненциальному) закону. Для показательного закона распределения

$$M(X) = 1/\lambda, \quad D(X) = 1/\lambda^2, \quad \sigma(X) = 1/\lambda,$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{при } x \ge 0, \end{cases}$$

$$P(\alpha \le X \le \beta) = F(\beta) - F(\alpha) = e^{-\lambda\alpha} - e^{-\lambda\beta}.$$

В прил. 6 дана таблица для вычисления функций e^x и e^{-x}.

Функция надежности. Если T – время безотказной работы механизма, то $F(t) = P(T < t)$ выражает вероятность выхода из строя механизма за время t. Тогда $R(t) = P(T > t) = 1 - F(t)$ – вероятность безотказной работы механизма за время t. Функция $R(t)$ называется *функцией надежности*.

Так как при показательном законе распределения вероятностей $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$, то $R(t) = e^{-\lambda t}$, где λ – интенсивность отказов (число отказов в единицу времени).

Пример 3. Время безотказной работы механизма подчинено показательному закону с плотностью распределения вероятностей $f(t) = 0{,}02e^{-0{,}02t}$ при $t \geq 0$ (t – время в часах). Найти вероятность того, что механизм проработает безотказно 100 ч.

▸ По условию $\lambda = 0{,}02$. Искомая вероятность

$$p = R(100) = e^{-0{,}02 \cdot 100} = e^{-2} \approx 0{,}1353\,.$$ ◂

Нормальный закон распределения. Если плотность распределения вероятностей СВ X

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-(x-m)^2/(2\sigma^2)}, \qquad (18.17)$$

то такое распределение СВ X называется *нормальным*. Входящие в формулу (18.17) величины m и σ являются соответственно математическим ожиданием и средним квадратичным отклонением распределенной нормально СВ X. Для нормального распределения

$$P(\alpha \leq X \leq \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - m}{\sigma}\right), \qquad (18.18)$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-t^2/2}dt$ – функция Лапласа, значения которой определяются из прил. 4.

Для нормального распределения верна также формула

$$P(|X - m| < \delta) = 2\Phi(\delta/\sigma)\,. \qquad (18.19)$$

Если, в частности, $\delta = 3\sigma$, то $P(|X - m| < 3\sigma) = 2\Phi(3) = 0{,}9973 \approx 1$, т.е. нормально распределенная СВ X отклоняется от своего математического ожидания m, как правило, менее чем на 3σ (*правило трех сигм*).

Пример 4. Производится измерение диаметра вала без систематических ошибок. Случайные ошибки измерения X подчинены нормальному закону со средним квадратичным отклонением $\sigma = 10$ мм. Найти вероятность того, что измерение будет произведено с ошибкой, не превышающей по абсолютной величине 15 мм.

▸ Математическое ожидание случайных ошибок $m_x = 0$, поэтому из формулы (18.19) при $\sigma = 10$, $\delta = 15$ получаем:

$$P(|X| < 15) = 2\Phi(15/10) = 2\Phi(1{,}5).$$

Из прил. 4 находим $\Phi(1{,}5) = 0{,}4332$, тогда искомая вероятность

$$P(|X| < 15) = 2 \cdot 0{,}4332 = 0{,}8664\,.$$ ◂

Закон распределения Вейбулла. Случайная величина X называется *распределенной по закону Вейбулла*, если ее интегральная функция распределения $F(x)$ имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < c, \\ 1 - e^{-\left(\frac{x-c}{a}\right)^b} & \text{при } x \ge c, \end{cases} \qquad (18.20)$$

где $a > 0$, $b > 0$, c – действительные числа, называемые соответственно параметром масштаба, параметром формы, параметром сдвига.

Дифференциальная функция распределения, или *плотность распределения Вейбулла,* находится по определению

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < c, \\ \frac{b}{a}\left(\frac{x-c}{a}\right)^{b-1} e^{-\left(\frac{x-c}{a}\right)^b} & \text{при } x \ge c. \end{cases} \qquad (18.21)$$

Графики интегральной функции $F(x)$ при $c = 0$ и разных значениях параметра формы b ($0 < b < 1$, $b = 1$, $b > 1$) изображены на рис. 18.15. Графики плотности $f(x)$ при $a = 1$, $c = 0$ и значениях параметра формы $b = 0,5$, $b = 1$, $b = 2$, $b = 3$ приведены на рис. 18.16.

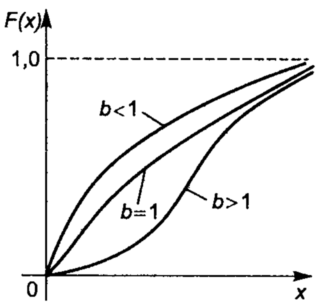


Рис. 18.15

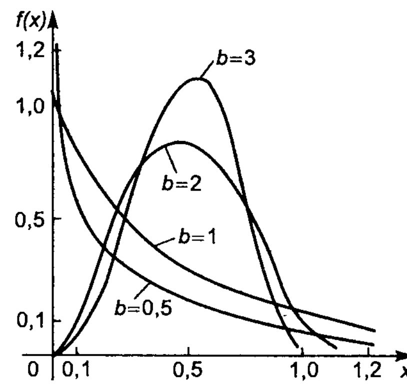


Рис. 18.16

З а м е ч а н и е. В частном случае, когда параметр формы $b = 1$, распределение Вейбулла превращается в показательное (экспоненциальное) распределение, а параметр маштаба a становится равным математическому ожиданию и среднему квадратичному отклонению ($M(X) = a$; $D(X) = a^2$; $\sigma(X) = a$).

В общем случае ($b \neq 1$) $M(X)$ и $D(X)$ для распределения Вейбулла вычисляется по формулам:

$$M(X) = a \int_0^{+\infty} x^{1/b} e^{-x} dx + c, \qquad (18.22)$$

$$D(X) = a^2\left(\int\limits_0^{+\infty} x^{2/b}e^{-x}dx - \left(\int\limits_0^{+\infty} x^{1/b}e^{-x}dx\right)^2\right). \qquad (18.23)$$

С целью упрощения вычислений вводится *гамма-функция* $\Gamma(x) = \int\limits_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$ (см. прил. 7), с помощью которой формулы (18.22) и (18.23) можно переписать в следующем виде:

$$M(X) = a\Gamma(1 + 1/b) + c, \qquad (18.24)$$

$$D(X) = a^2(\Gamma(1 + 2/b) - (\Gamma(1 + 1/b))^2). \qquad (18.25)$$

Из распределения (18.20) легко получаем формулу

$$P(\alpha \le X \le \beta) = F(\beta) - F(\alpha) = e^{-\left(\frac{\alpha - c}{a}\right)^b} - e^{-\left(\frac{\beta - c}{a}\right)^b}. \qquad (18.26)$$

Распределение Вейбулла используется при анализе пределов упругости и выносливости стали, при оценке времени безотказной работы приборов (надежности электрических устройств, агрегатов машин, отдельных узлов тракторов и т.д.). Оно зависит от трех параметров и является более сложным, но и более универсальным по сравнению с рассмотренными выше распределениями.

Пример 5. Срок службы подшипника является случайной величиной X, подчиненной закону распределения Вейбулла с параметром масштаба $a = 10$ лет, параметром формы $b = 2$ и параметром сдвига $c = 0$. Вычислить средний срок службы, среднее квадратичное отклонение от него и вероятность того, что подшипник прослужит не менее 9 лет.

▶ Пользуясь формулами (18.24)–(18.26) и прил. 6, 7, последовательно находим:

$$\bar{X} = M(X) = 10\Gamma\left(1 + \frac{1}{2}\right) = 10 \cdot 0{,}8862 = 8{,}862, \quad \bar{X} = 8{,}862 \text{ года},$$

$$D(X) = 100\left(\Gamma(1 + 1) - \left(\Gamma\left(1 + \frac{1}{2}\right)\right)^2\right) = 100(1{,}0000 - (0{,}8862)^2) =$$

$$= 100(1 - 0{,}7854) = 100 \cdot 0{,}2146 = 21{,}46,$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{21{,}46} = 4{,}63 \text{ года},$$

$$P(9 \le X < +\infty) = e^{-0{,}9^2} - e^{-\infty} = e^{-0{,}81} = 0{,}4449. \blacktriangleleft$$

АЗ-18.7

1. Проводят четыре независимых опыта, в каждом из которых событие A появляется с вероятностью $p = 0{,}4$. Случайная величина X – число появлений события A в четырех испытаниях. Построить ряд и функцию распределения СВ X, вычислить ее математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение. (*Ответ:* $m_x = 1{,}6$, $D(X) = 0{,}96$, $\sigma_x = 0{,}98$.)

2. Устройство состоит из 1000 элементов, работающих независимо друг от друга. Вероятность отказа любого элемента в течение времени T равна 0,002. Найти вероятность того, что за время T откажут ровно три элемента. (*Ответ:* 0,18.)

3. Завод отправил на базу 500 изделий. Вероятность повреждения изделия в пути $p = 0{,}002$. Найти вероятность того, что в пути будет повреждено: а) ровно три изделия; б) менее трех изделий; в) более трех изделий; г) хотя бы одно изделие. (*Ответ:* а) 0,0613; б) 0,9187; в) 0,019; г) 0,632.)

4. Среднее число заказов такси, поступающих на диспетчерский пункт в одну минуту, равно трем. Найти вероятность того, что за 2 мин поступит: а) четыре вызова; б) менее четырех вызовов; в) не менее четырех вызовов. (*Ответ:* а) 0,135; б) 0,1525; в) 0,8475.)

5. Случайная величина X распределена на отрезке [2; 8] с постоянной плотностью. Вычислить математическое ожидание и дисперсию СВ X, а также $P(3 \le X < 5)$. (*Ответ:* $m_x = 5$, $D(X) = 3$, $P(3 \le X < 5) = 0{,}333$.)

6. Если соблюдается график движения, то среднее время ожидания пассажиром автобуса равно 3,5 мин. Известно, что время ожидания имеет равномерный закон распределения. Минимальное время ожидания равно 0 мин. Найти вероятность того, что пассажир будет ожидать автобус от 2 до 5 мин. (*Ответ:* 3/7.)

7. Автомат изготавливает шарики. Шарик считается годным, если отклонение X его диаметра от номинала по абсолютной величине меньше 0,7 мм. Считая, что случайная ошибка распределена нормально со средним квадратичным отклонением $\sigma = 0{,}4$ мм, найти среднее количество годных шариков среди ста изготовленных. (*Ответ:* 92.)

8. Случайная величина X распределена нормально с математическим ожиданием $m_x = 25$. Вероятность попадания СВ X на отрезок [10; 15] равна 0,2. Чему равна вероятность попадания СВ X на отрезок [35; 40]? (*Ответ:* 0,2.)

9. Найти вероятность отклонения нормальной СВ X от математического ожидания m_x на величину $3\sigma_x$. (*Ответ:* 0,9973.)

10. Время ремонта и обслуживания автомобиля после одной поездки случайно и имеет показательный закон распределения с математическим ожиданием 5 мин. Найти вероятность того, что при очередной поездке это время не превысит 10 мин. (*Ответ:* 0,8647.)

Самостоятельная работа

1. Случайная величина X распределена нормально с математическим ожиданием 30 и средним квадратичным отклонением 10. Найти вероятность попадания СВ X на отрезок [10; 50]. (*Ответ:* 0,9544.)

2. Математическое ожидание и среднее квадратичное отклонение нормально распределенной СВ X равны соответственно 20 и 5. Найти вероятность того, что в результате испытания СВ X примет значение из отрезка [15; 25]. (*Ответ:* 0,6826.)

3. Среднее число вызовов, поступающих на станцию скорой помощи за 1 мин, равно 2. Найти вероятность того, что за 2 мин поступит 3 вызова. (*Ответ:* 0,195.)

18.8. СИСТЕМЫ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН И ИХ ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Совместное рассмотрение нескольких СВ приводит к *системе случайных величин.* Условно систему СВ $X, Y, \ldots, W$ записывают в виде точки $(X, Y, \ldots, W)$ пространства соответствующей размерности. Так, система двух СВ X и Y изображается точкой (X, Y) плоскости Oxy, а система X, Y, Z – точкой пространства $\mathbf{R}^3$. Значения, принимаемые каждой из величин системы (X, Y), будем обозначать через x и y.

Распределение системы двух дискретных СВ (X, Y) может быть задано следующей таблицей:

Y \ X	x_1	x_2	...	x_n
y_1	p_{11}	p_{21}	...	p_{n1}
y_2	p_{12}	p_{22}	...	p_{n2}
.	.	.	...	.
.	.	.	...	.
.	.	.	...	.
y_m	p_{1m}	p_{2m}	...	p_{nm}

где $P(X=x_i,\ \ Y=y_j)=p_{ij}$; $i=\overline{1,n}$; $j=\overline{1,m}$; $\sum\limits_{i,j=1}^{n,m} p_{ij}=1$; $\sum\limits_{j=1}^{m} p_{ij}=$

$=P(X=x_i)$; $\sum\limits_{i=1}^{n} p_{ij}=P(Y=y_j)$.

Функция $F(x,y)=P(X<x,\ Y<y)$ для любых $x,\ y\in\mathbf{R}$ называется *интегральной функцией распределения системы СВ* $(X,\ Y)$. Геометрически она задает вероятность попадания случайной точки $(X,\ Y)$ в бесконечный прямой угол с вершиной в точке $M\,(x,y)$ (рис. 18.17).

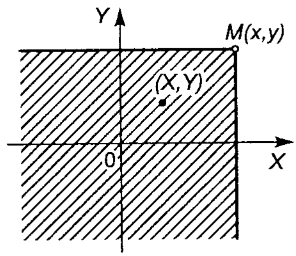


Рис. 18.17

Перечислим *основные свойства функции* $F(x,y)$:

1) $0\le F(x,y)\le 1$ для любых $x,\ y\in\mathbf{R}$;

2) $F(x_1,y)\le F(x_2,y)$ при $x_1<x_2$, $F(x,y_1)\le F(x,y_2)$ при $y_1<y_2$, т.е. $F(x,y)$ – неубывающая функция по каждому из аргументов;

3) $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}} F(x,y)=1$;

4) $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x,y)=\lim\limits_{y\to-\infty} F(x,y)=\lim\limits_{\substack{x\to-\infty\\ y\to-\infty}} F(x,y)=0$;

5) $F(x,+\infty)=F_x(x)$ и $F(+\infty,y)=F_y(y)$, т.е. если одна из переменных стремится к бесконечности, то получаем интегральную функцию распределения другой случайной величины;

6) $P(a<X<b,\ \ c<Y<d)=F(b,d)-F(a,d)-F(b,c)+F(a,c)$.

Плотностью распределения вероятностей системы двух СВ $(X,\ Y)$ или *совместной плотностью распределения вероятностей* называют предел

$$f(x,y)=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{P(x<X<x+\Delta x,\ \ y<Y<y+\Delta y)}{\Delta x\Delta y}.$$

Этот предел существует, если существует смешанная производная F''_{xy}. Тогда верно равенство $f(x,y)=F''_{xy}$.

Приведем *основные свойства плотности распределения вероятностей системы двух случайных величин:*

1) $f(x, y) \geq 0$ для любых $x, y \in \mathbf{R}$;

2) $P((X, Y) \in D) = \iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy$;

3) $F(x, y) = \int\limits_{-\infty}^{x} \int\limits_{-\infty}^{y} f(u, v)\,du\,dv$;

4) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\,dx\,dy = 1$;

5) $F_X(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} du \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(u, v)\,dv$, $F_Y(y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} du \int\limits_{-\infty}^{y} f(u, v)\,dv$;

6) справедливы равенства:

$$f_X(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\,dy, \quad f_Y(y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\,dx.$$

Функции $F_X(x)$, $F_Y(y)$ называются *маргинальными функциями распределения*, а $f_X(x)$, $f_Y(y)$ – *маргинальными плотностями распределения вероятностей СВ X и Y* соответственно.

Пример 1. Распределение системы СВ (X, Y) задано следующей таблицей:

$Y \setminus X$	$x_1 = 1$	$x_2 = 3$	$x_3 = 4$	$x_4 = 8$
$y_1 = 3$	0,15	0,06	0,25	0,04
$y_2 = 6$	0,30	0,10	0,03	0,07

Найти законы распределения составляющих системы.

▸ Сложив вероятности значений СВ X по столбцам, получим:

x_i	1	3	4	8
p_i	0,45	0,16	0,28	0,11

Аналогично, сложив вероятности возможных значений СВ Y по строкам, найдем:

y_j	3	6
p_j	0,5	0,5

◂

Пример 2. Система СВ (X, Y) имеет плотность распределения вероятностей

$$f(x, y) = \frac{a}{\pi^2(16+x^2)(9+y^2)}.$$

Найти: а) коэффициент a; б) функцию распределения $F(x, y)$; в) вероятность попадания случайной точки (X, Y) в прямоугольник $\Pi = \{|x| \le 4,\ |y| \le 3\}$; г) маргинальные функции распределения $F_X(x)$, $F_Y(y)$; д) маргинальные плотности распределения вероятностей $f_X(x)$, $f_Y(y)$.

▸ а) Для нахождения коэффициента a используем свойство 4 плотности распределения вероятностей системы двух СВ, из которого следует, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a}{\pi^2(x^2+16)(y^2+9)}\,dx\,dy = \frac{a}{\pi^2}\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{x}{4}\Big|_{-\infty}^{+\infty} \cdot \frac{1}{3} \times$$

$$\times \operatorname{arctg}\frac{y}{3}\Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{1}{12}\frac{a}{\pi^2}\pi^2 = 1,$$

откуда $a = 12$.

б) На основании свойства 3 плотности распределения вероятностей системы СВ имеем:

$$F(x, y) = \frac{12}{\pi^2}\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}\frac{du\,dv}{(16+u^2)(9+v^2)} =$$

$$= \frac{12}{\pi^2}\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{u}{4}\Big|_{-\infty}^{x} \cdot \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{v}{3}\Big|_{-\infty}^{y} =$$

$$= \left(\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{x}{4} + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{y}{3} + \frac{1}{2}\right).$$

в) Из свойства 2 плотности распределения вероятностей системы СВ получаем:

$$P((X, Y) \in \Pi) = \iint\limits_{\Pi} f(x, y)\,dx\,dy =$$

$$= \frac{12}{\pi^2}\int_{-4}^{4}\frac{dx}{16+x^2}\int_{-3}^{3}\frac{dy}{9+y^2} = \frac{1}{\pi^2}\operatorname{arctg}\frac{x}{4}\Big|_{-4}^{4}\ \operatorname{arctg}\frac{y}{3}\Big|_{-3}^{3} =$$

$$= \frac{1}{\pi^2}\frac{\pi}{2}\frac{\pi}{2} = 0{,}25.$$

г) По определению

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u, y)\,du\,dy = \frac{12}{\pi^2}\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{du\,dy}{(16+u^2)(9+y^2)} =$$

$$= \frac{12}{\pi^2}\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{u}{4}\Bigg|_{-\infty}^{x} \cdot \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{y}{3}\Bigg|_{-\infty}^{+\infty} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{x}{4} + \frac{1}{2}.$$

Аналогично получаем:

$$F_Y(y) = \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{y}{3} + \frac{1}{2}.$$

д) Функция

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)dy = \frac{12}{\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dy}{(16+x^2)(9+y^2)} =$$

$$= \frac{12}{\pi^2}\frac{1}{16+x^2}\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{y}{3}\Bigg|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{4}{\pi(16+x^2)}.$$

Аналогично находим:

$$f_Y(y) = \frac{3}{\pi(9+y^2)}. ◄$$

Маргинальные плотности распределения вероятностей f_X и f_Y можно получить дифференцированием функций $F_X(x)$ и $F_Y(y)$, т.е.

$$f_X(x) = dF_X(x)/dx, \quad f_Y(y) = dF_Y(y)/dy.$$

Распределение одной случайной величины системы, найденное при условии, что другая случайная величина этой системы приняла определенное значение, называется *условным законом распределения этой СВ.*

Если через $f(x/y)$ обозначить плотность распределения вероятностей СВ X, найденную при условии, что СВ $Y = y$, а через $f(y/x)$ – плотность распределения вероятностей СВ Y, найденную при условии, что СВ $X = x$, то справедливы следующие равенства:

$$f(x, y) = f_X(x)f(y/x) = f_Y(y)f(x/y). \tag{18.27}$$

Равенство (18.20) аналогично теореме умножения условных вероятностей событий. Условные плотности распределения вероятностей $f(x/y)$ и $f(y/x)$ можно вычислить по формулам:

$$f(x/y) = f(x, y)/\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)dx, \quad f(y/x) = f(x, y)/\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)dy. \tag{18.28}$$

Для условных плотностей распределения вероятностей справедливы равенства:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x/y)dx = 1, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(y/x)dy = 1.$$

Если $f(x/y) = f_X(x)$ или $f(y/x) = f_Y(y)$, то СВ X и Y называются *независимыми*. Для независимости СВ X и Y необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство $f(x/y) = f_X(x)f_Y(y)$.

Математическим ожиданием системы СВ (X, Y) называется точка $(M(X), M(Y)) = (m_x, m_y)$, где m_x, m_y – математические ожидания СВ X и Y соответственно. *Математические ожидания системы непрерывных СВ* (X, Y) определяются формулами:

$$m_x = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x, y)dxdy, \quad m_y = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} yf(x, y)dxdy. \tag{18.29}$$

Для дискретных СВ X и Y с совместным законом распределения $p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j)$ математические ожидания – соответственно

$$m_x = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i p_{ij}, \quad m_y = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} y_i p_{ij}. \tag{18.30}$$

Дисперсии СВ X и Y системы определяются по формулам:

$$D(X) = M((X - m_x)^2), \quad D(Y) = M((Y - m_y)^2).$$

Математическое ожидание одной СВ X системы, найденное при условии, что другая СВ Y этой системы приняла определенное значение, называется *условным математическим ожиданием СВ* X и обозначается $M(X/Y) = m_x(y)$.

Аналогично определяется и $M(Y/X) = m_y(x)$.

Условные математические ожидания вычисляются по следующим формулам:

для непрерывных величин

$$m_x(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x/y)dx, \quad m_y(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} yf(y/x)dy;$$

для дискретных случайных величин

$$m_x(y) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(x_i/Y = y_j), \quad m_y(x) = \sum_{j=1}^{m} y_j P(y_j/X = x_i).$$

Ковариацией или *корреляционным моментом системы СВ* (X, Y) называется величина

$$\sigma_{xy} = \operatorname{cov}(X, Y) = M((X - m_x)(Y - m_y)). \tag{18.31}$$

Формулу (18.24) можно преобразовать к виду

$$\sigma_{xy} = M(XY) - m_x m_y.$$

Для системы непрерывных случайных величин

$$\sigma_{xy} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xyf(x, y)\,dx\,dy - m_x m_y ,$$

а для системы дискретных случайных величин

$$\sigma_{xy} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i y_j p_{ij} - m_x m_y .$$

Перечислим *свойства корреляционного момента*:

1) $\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$;

2) $\sigma_{xx} = D(X) = \sigma_x^2$, $\sigma_{yy} = D(Y) = \sigma_y^2$;

3) если X и Y – независимые СВ, то $\sigma_{xy} = 0$ (обратное, вообще говоря, не верно).

Число

$$r_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$$

называется *коэффициентом корреляции* СВ X и Y.

Приведем *свойства коэффициента корреляции*:

1) $r_{xx} = r_{yy} = 1$;

2) $|r_{xy}| \le 1$;

3) $r_{xy} = 0$, если СВ X и Y независимы;

4) $|r_{xy}| = 1$ тогда и только тогда, когда $Y = aX + b$, где a, b – некоторые постоянные числа (это говорит о том, что коэффициент корреляции характеризует тесноту линейной связи между СВ X и Y).

Если $r_{xy} = 0$, то случайные величины называются *некоррелированными*.

Нормальным законом распределения на плоскости называется распределение вероятностей двухмерной СВ (X, Y) в случае, когда

$$f(x, y) = e^{\varphi(x, y)} / \left(2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1 - r_{xy}^2}\right),$$

где

$$\varphi(x, y) = -\frac{1}{2(1 - r_{xy}^2)}\left(\frac{(x - m_x)^2}{\sigma_x^2} + \frac{(y - m_y)^2}{\sigma_y^2} - 2r_{xy}\frac{x - m_x}{\sigma_x}\frac{y - m_y}{\sigma_y}\right);$$

m_x, m_y, σ_x, σ_y, r_{xy} – соответственно математические ожидания, средние квадратичные отклонения и коэффициент корреляции СВ X и Y. Для нормального закона при $r_{xy} = 0$ СВ X и Y будут независимыми, т.е. в этом случае понятия независимости и некоррелированности СВ X и Y равносильны.

В случае $r_{xy} = 0$ вероятность попадания случайной точки нормально распределенной системы (X, Y) в прямоугольник $D = \{a < X < b,\ c < Y < d\}$ вычисляется по формуле

$$P((X, Y) \in D) = \frac{1}{4}\left(\Phi\left(\frac{b - m_x}{\sigma_x}\right) - \Phi\left(\frac{a - m_x}{\sigma_x}\right)\right)\left(\Phi\left(\frac{d - m_y}{\sigma_y}\right) - \Phi\left(\frac{c - m_y}{\sigma_y}\right)\right),$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-t^2/2}dt$ – *интеграл вероятности*, или *функция Лапласа*, значения которой приведены в прил. 4.

Пример 3. Закон распределения системы СВ (X, Y) задан таблицей:

y_j \ x_i	1	3	5	7
−2	0,05	0,08	0,05	0,02
2	0,07	0,15	0,25	0,03
4	0,02	0,07	0,09	0,12

Найти: а) законы распределения СВ X и Y, входящих в систему; б) условный закон распределения составляющей X при условии $Y = y_2 = 2$; в) математическое ожидание, среднее квадратичное отклонение СВ X и Y, их коэффициент корреляции.

▶ а) Найдем вероятности значений X при всевозможных значениях Y путем суммирования вероятностей по столбцам. Получим закон распределения СВ X в виде ряда распределения:

x_i	1	3	5	7	
p_i	0,14	0,30	0,39	0,17	$\sum p_i = 1$

Аналогично, просуммировав вероятности во всех строках таблицы, получим ряд распределения для СВ Y:

y_j	−2	2	4	
p_j	0,2	0,5	0,3	$\sum p_j = 1$

б) Для нахождения условного распределения составляющей X при условии, что составляющая Y принимает значение $y_2 = 2$, воспользуемся формулой $P(x_i/y_j) = P(x_i, y_j)/P(y_j)$. Выше установлено, что $P(y_2) = 0{,}5$. Тогда

$$P(x_1/y_2) = 0{,}07/0{,}5 = 0{,}14\,,\quad P(x_2/y_2) = 0{,}15/0{,}5 = 0{,}3\,,$$

$$P(x_3/y_2) = 0{,}25/0{,}5 = 0{,}5\,,\quad P(x_4/y_2) = 0{,}03/0{,}5 = 0{,}06\,.$$

Найденный условный закон распределения X и $Y = y_2$ записываем в виде таблицы:

x_i	1	3	5	7	
$p(x/y_2)$	0,14	0,30	0,50	0,06	$\sum p(x_i/y_2) = 1$

в) Для нахождения числовых характеристик случайных величин системы воспользуемся указанными выше формулами. Имеем ($n = 4$, $m = 3$):

$$m_x = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i p_{ij} = 4,2, \quad m_y = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} y_j p_{ij} = 1,8,$$

$$D(X) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i^2 p_{ij} - m_x^2 = 3,28,$$

$$D(Y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} y_j^2 p_{ij} - m_y^2 = 4,36,$$

$$\sigma_x = \sqrt{D(X)} = 1,81, \quad \sigma_y = \sqrt{D(Y)} = 2,09,$$

$$\sigma_{xy} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i y_j p_{ij} - m_x m_y = -2,03,$$

$$r_{xy} = \sigma_{xy}/(\sigma_x \sigma_y) = -0,54. \blacktriangleleft$$

Пример 4. Плотность распределения вероятностей системы СВ (X, Y)

$$f(x, y) = \begin{cases} a \sin(x+y) & \text{при } 0 \le x \le \pi/2,\ 0 \le y \le \pi/2, \\ 0 & \text{в других случаях.} \end{cases}$$

Найти: а) коэффициент a; б) интегральную функцию распределения $F(x, y)$ системы СВ (X, Y); в) плотность распределения каждой составляющей системы; г) математическое ожидание и дисперсию СВ X и Y; д) корреляционный момент СВ X и Y.

$\blacktriangleright$ а) Из свойства 4 плотности распределения вероятностей имеем:

$$\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2} a \sin(x+y)\,dx\,dy = 1,$$

откуда

$$\int_0^{\pi/2} a(-\cos(x+y))\Big|_0^{\pi/2} dx = a\int_0^{\pi/2} (\cos x + \sin x)\,dx =$$

$$= a(\sin x - \cos x)\Big|_0^{\pi/2} = 2a = 1\ ,\ \ a = 1/2\ .$$

б) Функцию распределения $F(x, y)$ системы находим, используя свойство 3:

$$F(x, y) = P(X < x,\ \ Y < y) = \int_0^x du \int_0^y \frac{1}{2} \sin\,(u + v)\,dv =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^x \cos\,(u+v)\Big|_0^y du = \frac{1}{2}\int_0^x (\cos\,u - \cos\,(u+y))\,du =$$

$$= \frac{1}{2}(\sin\,u - \sin\,(u+y))\Big|_0^x = \frac{1}{2}(\sin\,x + \sin\,y - \sin\,(x+y))$$

для любых $(x,\ y) \in D$: $\{0 \le x \le \pi/2\ ,\ \ 0 \le y \le \pi/2\}$. Для точек плоскости, координаты которых $x \le 0$ или $y \le 0$, $F(x,\ y) = 0$, а для точек, координаты которых $x \ge \pi/2$, $y \ge \pi/2$, $F(x,\ y) = 1$.

Из свойства 5 функции распределения системы СВ следует, что

$$F(x,\ \pi/2) = F_X(x) = \frac{1}{2}(\sin\,x - \cos\,x + 1)\ ,$$

$$F(\pi/2,\ y) = F_Y(y) = \frac{1}{2}(\sin\,y - \cos\,y + 1)\ .$$

в) Плотность распределения вероятностей СВ X находим согласно свойству 6 функции распределения системы СВ по формуле

$$f_X(x) = \int_0^{\pi/2} f(x,\ y)\,dy = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}\sin\,(x+y)\,dy = -\frac{1}{2}\cos\,(x+y)\Big|_0^{\pi/2} =$$

$$= \frac{1}{2}(\cos\,x + \sin\,x)$$

или $F'_X(x) = f_X(x) = \frac{1}{2}(\cos\,x + \sin\,x)$.

Аналогично

$$f_Y(y) = \frac{1}{2}(\cos\,y + \sin\,y)\ .$$

г) Математическое ожидание СВ X

$$M(X) = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2} x\sin\,(x+y)\,dx\,dy = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} x\left(-\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \cos\,x\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} x(\sin\,x + \cos\,x)\,dx = \frac{1}{2}x(-\cos\,x + \sin\,x)\Big|_0^{\pi/2} -$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}(-\cos\,x + \sin\,x)\,dx = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(\sin\,x + \cos\,x)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}\ .$$

Так как плотность распределения вероятностей симметрична относительно X и Y, то $M(Y) = \pi/4$.

Дисперсия СВ X системы

$$D(X) = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2} x^2 \sin(x+y)\,dx\,dy - m_x^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} x^2 (\sin x + \cos x)\,dx - \frac{\pi^2}{16} = \frac{\pi^2}{16} + \frac{\pi}{2} - 2 \approx 0{,}1865,$$

а согласно указанной симметрии $D(Y) \approx 0{,}1865$.

д) Корреляционный момент находим по формуле

$$\sigma_{xy} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xyf(x, y)\,dx\,dy - m_x m_y =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2} xy\sin(x+y)\,dx\,dy - \pi^2/16 =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} x(-y\cos(x+y) + \sin(x+y))\Big|_0^{\pi/2} dx - \pi^2/16 =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} x\left(\frac{\pi}{2}\sin x + \cos x - \sin x\right)dx - \pi^2/16 =$$

$$= \pi/2 - 1 - \pi^2/16 \approx -0{,}0461.$$

Тогда

$$r_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x\sigma_y} = -\frac{0{,}0461}{0{,}1865} \approx -0{,}2472. \blacktriangleleft$$

АЗ-18.8

1. Распределение системы СВ (X, Y) задано таблицей:

Y \ X	0,01	0,02	0,03	0,04
0,02	0,01	0,02	0,04	0,04
0,04	0,03	0,24	0,15	0,06
0,06	0,04	0,10	0,08	0,08
0,08	0,02	0,04	0,03	0,02

Требуется найти: а) законы распределения каждой случайной величины системы и условный закон распределения СВ X при условии, что $Y = 0{,}06$; б) математическое ожидание и среднее квадратичное отклонение для каждой из СВ X и Y, коэффициент корреляции системы; в) условное математическое ожидание $M(X/Y = 0{,}04)$. (*Ответ:* б) $m_x = 0{,}026$; $m_y = 0{,}0482$, $\sigma_x = 0{,}0092$, $\sigma_y = 0{,}0165$, $r_{xy} = -0{,}072$; в) $M(X/Y = 0{,}04) = 0{,}012$.)

2. Найти условное математическое ожидание $M(Y/X = 0)$ для системы случайных величин с совместной плотностью распределения вероятностей

$$f(x, y) = \begin{cases} 10e^{-(5x+2y)} & \text{при } x \geq 0,\ y \geq 0, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

(*Ответ:* $M(Y/X = 0) = 0{,}5$.)

3. Плотности распределения вероятностей системы СВ (X, Y)

$$f(x, y) = \begin{cases} 4xye^{-(x^2+y^2)} & \text{при } x \geq 0,\ y \geq 0, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Найти математическое ожидание и дисперсию составляющих системы. (*Ответ:* $m_x = m_y = \sqrt{\pi}/2$, $D(X) = D(Y) = (4-\pi)/4$.)

4. Плотность распределения вероятностей системы СВ (X, Y)

$$f(x, y) = \begin{cases} 6e^{-(3x+2y)} & \text{при } x \geq 0,\ y \geq 0, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Найти математическое ожидание и среднее квадратичное отклонение каждой СВ системы, их ковариацию (корреляционный момент). (*Ответ:* $m_x = 1/3$, $m_y = 1/2$, $\sigma_x = 1/3$, $\sigma_y = 1/2$, $\sigma_{xy} = 0$.)

5. Независимые случайные величины распределены нормально с параметрами $m_x = 2$, $m_y = -3$, $\sigma_x = 1$, $\sigma_y = 2$. Вычислить вероятность того, что $|X| \leq 1$ и $|Y| \leq 2$. (*Ответ:* 0,0119.)

6. Система двух СВ (X, Y) равномерно распределена в треугольнике, ограниченном линиями $y = x$, $y = 0$, $x = 2$. Найти математические ожидания и средние квадратичные отклонения составляющих системы. Вычислить коэффициент корреляции системы. (*Ответ:* $m_x = 4/3$, $m_y = 2/3$, $\sigma_x = \sqrt{2}/2$, $\sigma_y = \sqrt{2}/2$, $r_{xy} = 0{,}5$.)

7. Заданы плотности распределения вероятностей независимых составляющих X и Y системы случайных величин:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ 5e^{-5x} & \text{при } x > 0, \end{cases} \qquad f_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{при } y < 0, \\ 3e^{-3y} & \text{при } y > 0. \end{cases}$$

Найти: а) плотность распределения вероятностей системы СВ (X, Y); б) интегральную функцию распределения системы; в) математическое ожидание, дисперсию составляющих X и Y, коэффициент корреляции системы СВ (X, Y). (*Ответ:* в) $m_x = 1/5$, $m_y = 1/3$, $D(X) = 1/25$, $D(Y) = 1/9$, $r_{xy} = 0$.)

8. Совместное распределение СВ X и Y задано таблицей:

Y \ X	-1	0	1
0	1/12	1/2	1/12
2	1/12	1/6	1/12

Найти законы распределения составляющих, вычислить корреляционный момент и выяснить, будут ли СВ X и Y независимы. (*Ответ:* $\sigma_{xy} = 0$; СВ X и Y зависимы.)

9. Закон распределения системы двух СВ (X, Y) имеет вид:

Y \ X	0	1	2	3
-1	0,01	0,06	0,05	0,04
0	0,04	0,24	0,15	0,17
1	0,05	0,10	0,10	0,09

Найти одномерные законы распределения СВ X и Y, их математические ожидания и дисперсии, коэффициент корреляции между X и Y. (*Ответ:* $m_x = 1{,}6$, $m_y = 0{,}18$, $D(X) = 0{,}84$, $D(Y) = 0{,}45$, $r_{xy} = -0{,}11$.)

Самостоятельная работа

1. Плотность распределения вероятностей СВ X

$$f(x) = \begin{cases} (\cos x)/2 & \text{при } x \in [-\pi/2;\ \pi/2], \\ 0 & \text{при } x \notin [-\pi/2;\ \pi/2]. \end{cases}$$

Найти корреляционный момент системы СВ X и $Y = X^2$. (*Ответ:* $\sigma_{xy} = 0$.)

2. Закон распределения системы СВ (X, Y) имеет вид:

$Y \backslash X$	2	5	8
0,4	0,15	0,30	0,35
0,8	0,05	0,12	0,03

Найти: а) законы распределения составляющих; б) условный закон распределения составляющей X при условии, что составляющая $Y = 0{,}4$; в) математические ожидания и дисперсии составляющих. (*Ответ:* в) $m_x = 5{,}54$, $m_y = 0{,}46$, $D(X) = 4{,}93$, $D(Y) = 0{,}026$.)

3. Закон распределения системы СВ (X, Y) имеет вид:

$Y \backslash X$	3	10	12
4	0,17	0,13	0,25
5	0,10	0,30	0,05

Найти: а) закон распределения составляющих X и Y системы; б) закон распределения составляющей X, если составляющая $Y = 5$; в) математические ожидания и дисперсии составляющих X и Y. (*Ответ:* в) $m_x = 5{,}71$, $m_y = 4{,}45$, $D(X) = 56{,}03$, $D(Y) = 0{,}25$.)

18.9. ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ДОМАШНИЕ ЗАДАНИЯ К ГЛ. 18

ИДЗ-18.1

Решить следующие задачи.

1

1.1. На сельскохозяйственные работы из трех бригад выделяют по одному человеку. Известно, что в первой бригаде 15 человек, во второй – 12, в третьей – 10 человек. Определить число возможных групп по 3 человека, если известно, что на сельскохозяйственные работы может быть отправлен каждый рабочий. (*Ответ:* 1800.)

1.2. Пять пассажиров садятся в электропоезд, состоящий из 10 вагонов. Каждый пассажир с одинаковой вероятностью может сесть в любой из 10 вагонов. Определить число всех возможных вариантов размещения пассажиров в поезде. (*Ответ:* 100 000.)

1.3. Студенты данного курса изучают 12 дисциплин. В расписание занятий каждый день включается по 3 предмета. Сколькими способами может быть составлено расписание занятий на каждый день? (*Ответ:* 1320.)

1.4. Восемь человек договорились ехать в одном поезде, состоящем из восьми вагонов. Сколькими способами можно распределить этих людей по вагонам, если в каждый вагон сядет по одному человеку? (*Ответ:* 40 320.)

1.5. В шахматном турнире участвовало 14 шахматистов, каждый из них сыграл с каждым по одной партии. Сколько всего сыграно партий? (*Ответ:* 91.)

1.6. На конференцию из трех групп студентов одной специальности выбирают по одному делегату. Известно, что в первой группе 25, во второй – 28 и в третьей – 20 человек. Определить число возможных делегаций, если известно, что каждый студент из любой группы с одинаковой вероятностью может войти в состав делегации. (*Ответ:* 14 000.)

1.7. Из девяти значащих цифр составляются трехзначные числа. Сколько различных чисел может быть составлено? (*Ответ:* 729.)

1.8. Сколько различных четырехзначных чисел можно записать с помощью девяти значащих цифр, из которых ни одна не повторяется? (*Ответ:* 3024.)

1.9. В пассажирском поезде 10 вагонов. Сколькими способами можно размещать вагоны, составляя этот поезд? (*Ответ:* 3 628 000.)

1.10. Из 10 кандидатов на одну и ту же должность должно быть выбрано 3. Определить все возможные варианты результатов выборов. (*Ответ:* 120.)

1.11. Бригадир должен отправить на работу звено из 5 человек. Сколько таких звеньев можно составить из 12 человек бригады? (*Ответ:* 792.)

1.12. Сколько прямых линий можно провести через 8 точек, если известно, что любые три из них не лежат на одной прямой? (*Ответ:* 28.)

1.13. Сколькими способами можно составить патруль из трех солдат и одного офицера, если имеется 80 солдат и 3 офицера? (*Ответ:* 246 480.)

1.14. Сколькими способами можно распределить 6 различных книг между тремя учениками так, чтобы каждый получил 2 книги? (*Ответ:* 90.)

1.15. Сколькими различными способами можно избрать из 15 человек делегацию в составе трех человек? (*Ответ:* 455.)

1.16. Сколькими различными способами собрание, состоящее из 40 человек, может выбрать председателя собрания, его заместителя и секретаря? (*Ответ:* 59 280.)

1.17. Сколькими способами можно выбрать два карандаша и три ручки из пяти различных карандашей и пяти различных ручек? (*Ответ:* 100.)

1.18. Сколько различных пятизначных чисел можно записать с помощью цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 (без повторений)? (*Ответ:* 15 120.)

1.19. Сколькими способами можно смоделировать флаг, состоящий из трех горизонтальных полос различных цветов, если имеется материал пяти различных цветов? (*Ответ:* 60.)

1.20. Сколькими способами можно расставить белые фигуры (2 коня, 2 слона, 2 ладьи, 1 ферзь, 1 король) на первой линии шахматной доски? (*Ответ:* 5040.)

1.21. При встрече 12 человек обменялись рукопожатиями. Сколько рукопожатий было при этом? (*Ответ:* 66.)

1.22. Сколькими способами можно выставить на игру футбольную команду, состоящую из трех нападающих, трех полузащитников, четырех защитников и вратаря, если всего в команде 6 нападающих, 3 полузащитника, 6 защитников и 1 вратарь? (*Ответ:* 300.)

1.23. Пофсоюзное бюро факультета, состоящее из 9 человек, на своем заседании должно избрать председателя, его заместителя и казначея. Сколько различных случаев при этом может быть? (*Ответ:* 504.)

1.24. Сколько перестановок можно сделать из букв слова «ракета», чтобы все они начинались с буквы «р»? (*Ответ:* 60.)

1.25. Автоколонна, состоящая из 30 автомобилей, должна выделить на уборочные работы в колхозы 12 грузовиков. Сколькими способами можно это сделать? (*Ответ:* 86 493 225.)

1.26. На шахматном турнире было сыграно 45 партий, причем каждый из шахматистов сыграл с остальными по одной партии. Сколько шахматистов участвовало в турнире? (*Ответ:* 10.)

1.27. На станции имеется 6 запасных путей. Сколькими способами можно расставить на них 4 поезда? (*Ответ:* 360.)

1.28. Из группы студентов инженерно-строительного факультета в 16 человек формируются две строительные бригады по 10 и 6 человек. Сколькими способами можно создать эти бригады? (*Ответ:* 8008.)

1.29. На диске телефонного аппарата имеется 10 цифр. Каждый телефон АТС имеет номер, записываемый с помощью пяти цифр, причем первая цифра у них одна и та же. Найти наибольшее возможное число таких абонентов этой станции, у которых 4 последние цифры номера телефона различны. (*Ответ:* 5040.)

1.30. Из чисел 1, 2, 3, ..., 100 составлены все возможные парные произведения. Сколько полученных чисел будет кратно трём? (*Ответ:* 2739.)

2

2.1. Из пяти букв разрезной азбуки составлено слово «песня». Ребенок, не умеющий читать, рассыпал буквы и затем собрал в произвольном порядке. Найти вероятность того, что у него снова получилось слово «песня». (*Ответ:* 0,0083.)

2.2. Куб, все грани которого окрашены, распилен на тысячу кубиков одинакового размера. Полученные кубики тщательно перемешаны. Определить вероятность того, что наугад извлеченный кубик будет иметь две окрашенные грани. (*Ответ:* 0,096.)

2.3. Из партии втулок, изготовленных за смену токарем, случайным образом отбирается для контроля 10 шт. Найти вероятность того, что среди отобранных втулок две – второго сорта, если во всей партии 25 втулок первого сорта и 5 – второго. (*Ответ:* 0,3601.)

2.4. В лифт шестиэтажного дома на первом этаже вошли 3 человека. Каждый из них с одинаковой вероятностью выйдет на любом из этажей, начиная со второго. Найти вероятность того, что все пассажиры выйдут на четвертом этаже. (*Ответ:* 0,008.)

2.5. В группе спортсменов 7 лыжников и 3 конькобежца. Из нее случайным образом выделены три спортсмена. Найти вероятность того, что все выбранные спортсмены окажутся лыжниками. (*Ответ:* 0,29.)

2.6. Из букв разрезной азбуки составлено слово «ремонт». Карточки с отдельными буквами тщательно перемешивают, затем наугад вытаскивают 4 карточки и раскладывают их в порядке извлечения. Какова вероятность получения при этом слова «море»? (*Ответ:* 1/360.)

2.7. Из восьми книг две художественные. Найти вероятность того, что среди взятых наугад четырех книг хотя бы одна художественная. (*Ответ:* 0,785.)

2.8. На полке 6 радиоламп, из которых две негодные. Случайным образом отбираются две радиолампы. Какова вероятность того, что они годны для использования? (*Ответ:* 0,4.)

2.9. В запасе ремонтной мастерской 10 поршневых колец, три из них восстановленные. Определить вероятность того, что среди взятых наугад четырех колец два окажутся восстановленными? (*Ответ:* 0,3.)

2.10. Десять студентов условились ехать определенным рейсом электропоезда с 10 вагонами, но не договорились о номере вагона. Какова вероятность того, что ни один из них не встретится с другим, если возможности в размещении студентов по вагонам равновероятны? (*Ответ:* 0,000363.)

2.11. Билеты лотереи выпущены на общую сумму 10 000 у.е. Цена билета 0,5 у.е. Ценные выигрыши падают на 50 билетов. Определить вероятность ценного выигрыша на один билет. (*Ответ:* 0,0025.)

2.12. В группе из 8 спортсменов шесть мастеров спорта. Найти вероятность того, что из двух случайным образом отобранных спортсменов хотя бы один – мастер спорта. (*Ответ:* 0,9643.)

2.13. Из партии деталей, среди которых 100 стандартных и 5 бракованных, для контроля наугад взято 12 шт. При контроле выяснилось, что первые 10 из 12 деталей – стандартные.

Определить вероятность того, что следующая деталь будет стандартной. (*Ответ:* 0,944.)

2.14. Определить вероятность того, что серия наугад выбранной облигации не содержит одинаковых цифр, если номер серии может быть любым пятизначным числом начиная с 0,0001. (*Ответ:* 0,302.)

2.15. Буквенный замок содержит на общей оси 5 дисков, каждый из которых разделен на 6 секторов с различными нанесенными на них буквами. Замок открывается только в том случае, если каждый диск занимает одно определенное положение относительно корпуса замка. Определить вероятность открытия замка, если установлена произвольная комбинация букв. (*Ответ:* 0,00013.)

2.16. Партия из 100 деталей проверяется контролером, который наугад отбирает 10 деталей и определяет их качество. Если среди выбранных контролером деталей нет ни одной бракованной, то вся партия принимается. В противном случае ее посылают на дополнительную проверку. Какова вероятность того, что партия деталей, содержащая 5 бракованных, будет принята контролером? (*Ответ:* 0,5838.)

2.17. На десяти одинаковых карточках написаны различные числа от 0 до 9. Определить вероятность того, что случайно составленное с помощью данных карточек двузначное число делится на 18. (*Ответ:* 0,056.)

2.18. На полке случайным образом расставляются 10 книг. Определить вероятность того, что при этом три определенные книги окажутся стоящими рядом. (*Ответ:* 0,067.)

2.19. Из коробки, содержащей карточки с буквами «о», «н», «к», «ь», наугад вынимают одну карточку за другой и располагают в порядке извлечения. Какова вероятность того, что в результате получится слово «конь»? (*Ответ:* 0,0417.)

2.20. Из пруда, в котором плавают 40 щук, выловили 5 щук, пометили их и пустили обратно в пруд. Во второй раз выловили 9 щук. Какова вероятность, что среди них окажутся только две помеченные щуки? (*Ответ:* 0,246.)

2.21. На шахматную доску из 64 клеток ставят наугад две ладьи белого и черного цвета. С какой вероятностью они не будут «бить» друг друга? (*Ответ:* 0,78.)

2.22. Из пяти карточек с буквами «а», «б», «в», «г», «д» наугад одну за другой выбирают две и располагают их в порядке извлечения. Какова вероятность того, что получится слово «да»? (*Ответ:* 0,0167.)

2.23. В урне 3 белых и 7 черных шаров. Какова вероятность того, что извлеченные наугад два шара окажутся черными? (*Ответ:* 0,467.)

2.24. Мальчик забыл две последние цифры номера телефона одноклассника и набрал их наугад, помня только, что эти цифры нечетны и различны. Найти вероятность того, что номер набран правильно. (*Ответ:* 0,05.)

2.25. Два человека условились встретиться в определенном месте между двумя и тремя часами дня. Пришедший первым ждет другого в течение 10 мин, после чего уходит. Чему равна вероятность встречи этих людей, если приход каждого из них в течение указанного часа может произойти в любое время? (*Ответ:* 0,3056.)

2.26. После бури на участке телефонной линии между 40-м и 70-м километрами произошел обрыв провода. Какова вероятность того, что он произошел между 50-м и 55-м километрами линии? (*Ответ:* 0,167.)

2.27. В мастерскую для ремонта поступило 20 телевизоров. Известно, что 7 из них нуждаются в настройке. Мастер берет любые 5 телевизоров. Какова вероятность того, что 2 из них нуждаются в настройке? (*Ответ:* 0,3874.)

2.28. В шахматном турнире участвуют 20 человек, которых по жребию распределяют в две группы по 10 человек. Найти вероятность того, что два сильнейших шахматиста будут играть в разных группах. (*Ответ:* 0,5263.)

2.29. В партии, состоящей из 20 радиоприемников, 5 неисправных. Наугад берут 3 радиоприемника. Какова вероятность того, что в число выбранных войдут 1 неисправный и 2 исправных радиоприемника? (*Ответ:* 0,4605.)

2.30. В магазине из 100 пар зимних сапог одного фасона 10 – коричневого цвета, а остальные – черного. Произвольно отбирают 8 пар сапог. Какова вероятность того, что все выбранные сапоги – черного цвета? (*Ответ:* 0,3305.)

3

3.1. В телестудии три телевизионные камеры. Вероятности того, что в данный момент камера включена, равны соответственно 0,9; 0,8; 0,7. Найти вероятность того, что в данный момент включены: а) две камеры; б) не более одной камеры; в) три камеры. (*Ответ:* а) 0,398; б) 0,098; в) 0,504.)

3.2. На заводе железобетонных изделий изготавливают панели, 90 % из которых – высшего сорта. Какова вероятность того, что из трех наугад выбранных панелей высшего сорта будут: а) три панели; б) хотя бы одна панель; в) не более одной панели? (*Ответ:* а) 0,729; б) 0,999; в) 0,271.)

3.3. В блок входят три радиолампы. Вероятности выхода из строя в течение гарантийного срока для них равны соответственно 0,3; 0,2; 0,4. Какова вероятность того, что в течение гарантийного срока выйдут из строя: а) не менее двух радиоламп; б) ни одной радиолампы; в) хотя бы одна радиолампа? (*Ответ:* а) 0,212; б) 0,336; в) 0,664.)

3.4. В первом ящике 20 деталей, 15 из них – стандартные, во втором ящике 30 деталей, 25 из них – стандартные. Из каждого ящика наугад берут по одной детали. Какова вероятность того, что: а) обе детали будут стандартными; б) хотя бы одна деталь стандартная; в) обе детали нестандартные? (*Ответ:* а) 0,625; б) 0,9583; в) 0,04266.)

3.5. Вероятность поражения цели первым стрелком равна 0,9, вторым – 0,7. Оба стрелка сделали по одному выстрелу. Какова вероятность того, что цель поражена: а) хотя бы один раз; б) два раза; в) один раз? (*Ответ:* а) 0,97; б) 0,63; в) 0,34.)

3.6. При одном цикле обзора трех радиолокационных станций, следящих за космическим кораблем, вероятности его обнаружения равны соответственно 0,7; 0,8; 0,9. Найти вероятность того, что при одном цикле обзора корабль: а) будет обнаружен тремя станциями; б) будет обнаружен не менее чем двумя станциями; в) не будет обнаружен. (*Ответ:* а) 0,504; б) 0,902; в) 0,006.)

3.7. Вычислительная машина состоит из четырех блоков. Вероятность безотказной работы в течение времени T первого блока равна 0,4, второго – 0,5, третьего – 0,6, червертого – 0,4. Найти вероятность того, что в течение времени T проработают: а) все четыре блока; б) три блока; в) менее трех блоков. (*Ответ:* а) 0,048; б) 0,224; в) 0,728.)

3.8. Трое рабочих собирают подшипники. Вероятность того, что подшипник, собранный первым рабочим, – высшего качества, равна 0,7, вторым – 0,8, третьим – 0,6. Для контроля взято по одному подшипнику из собранных каждым рабочим. Какова вероятность того, что высшего качества будут: а) все подшипники; б) два подшипника; в) хотя бы один подшипник? (*Ответ:* а) 0,336; б) 0,452; в) 0,976.)

3.9. На сборку поступают детали с трех станков с ЧПУ. Первый станок дает 20 %, второй – 30, третий – 50 % однотипных деталей, поступающих на сборку. Найти вероятность того, что из трех наугад взятых деталей: а) три с разных станков; б) три с третьего станка; в) две с третьего станка. (*Ответ:* а) 0,03; б) 0,125; в) 0,125.)

3.10. Первый станок-автомат дает 1 % брака, второй – 1,5, а третий – 2 %. Случайным образом отобрали по одной детали с каждого станка. Какова вероятность того, что стандартными окажутся: а) три детали; б) две детали; в) хотя бы одна деталь? (*Ответ:* а) 0,9556; б) 0,0437; в) 0,999997.)

3.11. В цехе имеется три резервных электродвигателя. Для каждого из них вероятность того, что в данный момент он включен, равна соответственно 0,2; 0,3; 0,1. Найти вероятность того, что включены: а) два электродвигателя; б) хотя бы один электродвигатель; в) три электродвигателя. (*Ответ:* а) 0,092; б) 0,496; в) 0,006.)

3.12. На участке кросса для мотоциклиста-гонщика имеется три препятствия. Вероятность успешного прохождения первого препятствия равна 0,4, второго – 0,5, третьего – 0,6. Найти вероятность успешного преодоления: а) трех препятствий; б) не менее двух препятствий; в) двух препятствий. (*Ответ:* а) 0,12; б) 0,5; в) 0,38.)

3.13. Вероятность того, что студент сдаст первый экзамен, равна 0,9, второй – 0,7, третий – 0,6. Вычислить вероятность того, что студент сдаст: а) два экзамена; б) не менее двух экзаменов; в) не более двух экзаменов. (*Ответ:* а) 0,456; б) 0,834; в) 0,622.)

3.14. Самолет противника обнаруживается тремя радиолокаторами с вероятностями 0,8; 0,7; 0,5. Какова вероятность обнаружения самолета: а) одним радиолокатором; б) двумя радиолокаторами; в) хотя бы одним радиолокатором? (*Ответ:* а) 0,22; б) 0,47; в) 0,75.)

3.15. Два бомбардировщика преодолевают зону ПВО. Вероятность того, что будет сбит первый бомбардировщик, равна 0,7, второй – 0,8. Найти вероятность: а) уничтожения одного бомбардировщика; б) поражения двух бомбардировщиков; в) промахов. (*Ответ:* а) 0,38; б) 0,56; в) 0,06.)

3.16. Стрелок произвел четыре выстрела по удаляющейся от него цели, причем вероятность попадания в цель в начале стрельбы равна 0,7, а после каждого выстрела уменьшается на 0,1. Вычислить вероятность того, что цель будет поражена: а) четыре раза; б) три раза; в) не менее трех раз. (*Ответ:* а) 0,084; б) 0,302; в) 0,386.)

3.17. Первый рабочий изготавливает 40 % изделий второго сорта, а второй – 30 %. У каждого рабочего взято наугад по два изделия. Какова вероятность того, что: а) все четыре изделия – второго сорта; б) хотя бы три изделия – второго сорта; в) менее трех изделий – второго сорта. (*Ответ:* а) 0,0144; б) 0,1248; в) 0,8752.)

3.18. При некоторых определенных условиях вероятность сбить самолет противника из первого зенитного орудия равна 0,4, из второго – 0,5. Сделано по одному выстрелу. Найти вероятность того, что: а) самолет уничтожен двумя снарядами; б) самолет поражен хотя бы одним снарядом; в) ни один снаряд не попал в цель. (*Ответ:* а) 0,2; б) 0,7; в) 0,3.)

3.19. Вероятность выигрыша по лотерейному билету первого выпуска равна 0,2, второго – 0,3. Имеется по два билета каждого выпуска. Найти вероятность того, что выиграют: а) три билета; б) не менее трех билетов; в) менее трех билетов. (*Ответ:* а) 0,0456; б) 0,0492; в) 0,9508.)

3.20. Три команды спортивного общества A состязаются соответственно с тремя командами общества B. Вероятности выигрышей первой, второй и третьей команд из общества A у соответствующих команд из общества B равны 0,7; 0,6; 0,4. Команды провели по одной встрече. Какова вероятность того, что команды общества A выиграют: а) две встречи; б) хотя бы две встречи; в) три встречи? (*Ответ:* а) 0,436; б) 0,604; в) 0,168.)

3.21. Вероятность поражения цели первым стрелком при одном выстреле равна 0,7, вторым – 0,5. Найти вероятность того, что цель будет поражена: а) двумя стрелками; б) хотя бы одним стрелком; в) только одним стрелком. (*Ответ:* а) 0,35; б) 0,85; в) 0,5.)

3.22. В коробках находятся детали: в первой – 20, из них 13 стандартных; во второй – 30, из них 26 стандартных. Из каждой коробки наугад берут по одной детали. Найти вероятность того, что: а) обе детали окажутся нестандартными; б) одна деталь нестандартная; в) обе детали стандартные. (*Ответ:* а) 0,4667; б) 0,39; в) 0,5633.)

3.23. Три станка работают независимо друг от друга. Вероятность того, что первый станок в течение смены выйдет из строя, равна 0,1, второй – 0,2 и третий – 0,3. Найти вероятность того, что в течение смены выйдут из строя: а) не менее двух станков; б) два станка; в) три станка. (*Ответ:* а) 0,098; б) 0,092; в) 0,006.)

3.24. В ящике 50 % деталей, изготовленных на заводе № 1, 20 % – на заводе № 2 и 30 % – на заводе № 3. Наугад взято три детали. Найти вероятность того, что: а) все три детали – с завода № 1; б) две детали – с завода № 1; в) все три детали – с разных заводов. (*Ответ:* а) 0,125; б) 0,125; в) 0,03.)

3.25. Для аварийной сигнализации установлены два независимо работающих сигнализатора. Вероятность того, что при аварии сработает первый сигнализатор, равна 0,9, второй – 0,7. Найти вероятность того, что при аварии: а) сработают оба сигнализатора; б) не сработает ни один сигнализатор; в) сработает хотя бы один сигнализатор. (*Ответ:* а) 0,63; б) 0,03; в) 0,97.)

3.26. На двух станках обрабатываются однотипные детали. Появление бракованной детали для станка № 1 составляет 3 %, для станка № 2 – 4 %. С каждого станка взяли по одной детали. Найти вероятность того, что: а) обе детали стандартные; б) одна деталь стандартная; в) обе детали нестандартные. (*Ответ:* а) 0,9312; б) 0,0676; в) 0,0012.)

3.27. Три автомата изготавливают детали. Вероятность того, что деталь, изготовленная первым автоматом, – высшего качества, равна 0,9, для второго – 0,7, для третьего – 0,6. Наугад берут по одной детали с каждого автомата. Найти вероятность того, что из взятых деталей: а) все высшего качества; б) две высшего качества; в) хотя бы одна высшего качества. (*Ответ:* а) 0,378; б) 0,456; в) 0,988.)

3.28. Вычислительный центр, который должен производить непрерывную обработку поступающей информации, располагает двумя вычислительными устройствами. Известно, что вероятность отказа за некоторое время T у каждого из них равна 0,2. Найти вероятность безотказной работы за время T: а) каждого устройства; б) хотя бы одного устройства; в) одного устройства. (*Ответ:* а) 0,64; б) 0,96; в) 0,32.)

3.29. Инженер выполняет расчет, пользуясь тремя справочниками. Вероятности того, что интересующие его данные находятся в первом, втором, третьем справочниках, равны соответственно 0,6; 0,7; 0,8. Найти вероятность того, что интересующие инженера данные содержатся: а) только в одном справочнике; б) только в двух справочниках; в) во всех трех справочниках. (*Ответ:* а) 0,188; б) 0,452; в) 0,336.)

3.30. Вероятность безотказной работы за время T блока, входящего в прибор, равна 0,85. Для повышения надежности устанавливается такой же резервный блок. Определить вероятность безотказной работы прибора за время T с учетом резервного блока. (*Ответ:* 0,9775.)

4

4.1. 20 % приборов монтируется с применением микромодулей, остальные – с применением интегральных схем. Надежность прибора с применением микромодулей – 0,9, интегральных схем – 0,8. Найти: а) вероятность надежной работы наугад взятого прибора; б) вероятность того, что прибор – с микромодулем, если он был исправен. (*Ответ:* а) 0,82; б) 0,22.)

4.2. Детали попадают на обработку на один из трех станков с вероятностями, равными соответственно 0,2; 0,3; 0,5. Вероятность брака на первом станке равна 0,02, на втором – 0,03, на третьем – 0,01. Найти: а) вероятность того, что случайно взятая после обработки деталь – стандартная; б) вероятность обработки наугад взятой детали на втором станке, если она оказалась стандартной. (*Ответ:* а) 0,982; б) 0,2963.)

4.3. Среди поступивших на сборку деталей 30 % – с завода № 1, остальные – с завода № 2. Вероятность брака для завода № 1 равна 0,02, для завода № 2 – 0,03. Найти: а) вероятность того, что наугад взятая деталь стандартная; б) вероятность изготовления наугад взятой детали на заводе № 1, если она оказалась стандартной. (*Ответ:* а) 0,973; б) 0,302.)

4.4. Три автомата изготавливают однотипные детали, которые поступают на общий конвейер. Производительности первого, второго и третьего автоматов соотносятся как 2 : 3 : 5. Вероятность того, что деталь с первого автомата – высшего качества, равна 0,8, со второго – 0,6, с третьего – 0,7. Найти вероятность того, что: а) наугад взятая с конвейера деталь окажется высшего качества; б) наугад взятая деталь высшего качества изготовлена первым автоматом. (*Ответ:* а) 0,69; б) 0,2319.)

4.5. Комплектовщик получает для сборки 30 % деталей с завода № 1, 20 % – с завода № 2, остальные – с завода № 3. Вероятность того, что деталь с завода № 1 – высшего качества, равна 0,9, с завода № 2 – 0,8, с завода № 3 – 0,6. Найти вероятность того, что: а) случайно взятая деталь – высшего качества; б) наугад взятая деталь высшего качества изготовлена на заводе № 2. (*Ответ:* а) 0,73; б) 0,2192.)

4.6. Заготовка может поступить для обработки на один из двух станков с вероятностями 0,4 и 0,6 соответственно. При обработке на первом станке вероятность брака составляет 2 %, на втором – 3 %. Найти вероятность того, что: а) наугад взятое после обработки изделие – стандартное; б) наугад взятое после обработки стандартное изделие обработано на первом станке. (*Ответ:* а) 0,974; б) 0,402.)

4.7. На двух станках обрабатываются однотипные детали. Вероятность брака для станка № 1 составляет 0,03, для станка № 2 – 0,02. Обработанные детали складываются в одном месте, причем деталей, обработанных на станке № 1, вдвое больше, чем на станке № 2. Найти вероятность того, что: а) взятая наугад деталь будет стандартной; б) наугад взятая стандартная деталь изготовлена на первом станке. (*Ответ:* а) 0,0266; б) 0,7518.)

4.8. В дисплейном классе имеется 10 персональных компьютеров первого типа и 15 второго типа. Вероятность того, что за время работы на компьютере первого типа не произойдет сбой, равна 0,9, а на компьютере второго типа – 0,7. Найти вероятность того, что: а) на случайно выбранном компьютере за время работы не произойдет сбой; б) компьютер, во время работы на котором не произошел сбой, – первого типа. (*Ответ:* а) 0,78; б) 0,4615.)

4.9. В пяти ящиках с 30 шарами в каждом содержится по 5 красных шаров, в шести других ящиках с 20 шарами в каждом – по 4 красных шара. Найти вероятность того, что: а) из наугад взятого ящика наудачу взятый шар будет красным; б) наугад взятый красный шар содержится в одном из первых пяти ящиков. (*Ответ:* а) 0,1848; б) 0,4099.)

4.10. По линии связи передано два сигнала типа A и B с вероятностями соответственно 0,8 и 0,2. В среднем принимается 60 % сигналов типа A и 70 % типа B. Найти вероятность того, что: а) посланный сигнал будет принят; б) принятый сигнал – типа A. (*Ответ:* а) 0,62; б) 0,7742.)

4.11. Для сигнализации о том, что режим работы автоматической линии отклоняется от нормального, используются индикаторы двух типов. Вероятности того, что индикатор принадлежит к одному из двух типов, равны соответственно 0,4 и 0,6. При нарушении работы линии вероятность срабатывания индикатора первого типа равна 0,9, второго – 0,7. а) Найти вероятность того, что наугад выбранный индикатор сработает при нарушении нормальной работы линии. б) Индикатор сработал. К какому типу он вероятнее всего принадлежит? (*Ответ:* а) 0,78; б) ко второму.)

4.12. Резистор, поставленный в телевизор, может принадлежать к одной из двух партий с вероятностями 0,6 и 0,4. Вероятности того, что резистор проработает гарантийное число часов, для этих партий равны соответственно 0,8 и 0,7. а) Найти вероятность того, что взятый наугад резистор проработает гарантийное число часов. б) Резистор проработал гарантийное число часов. К какой партии он вероятнее всего принадлежит? (*Ответ:* а) 0,76; б) к первой.)

4.13. При отклонении от штатного режима работы поточной линии срабатывают сигнализатор типа Т-1 с вероятностью 0,9 и сигнализатор типа Т-2 с вероятностью 0,8. Вероятности того, что линия снабжена сигнализаторами типа Т-1 и Т-2, равны соответственно 0,7 и 0,3. а) Найти вероятность того, что при отклонении от штатного режима работы сигнализатор сработает. б) Сигнализатор сработал. К какому типу он вероятнее всего принадлежит? (*Ответ:* а) 0,87; б) Т-1.)

4.14. Для участия в студенческих спортивных соревнованиях выделено 10 человек из первой группы и 8 из второй. Вероятность того, что студент первой группы попадет в сборную института, равна 0,8, а для студента второй группы – 0,7. а) Найти вероятность того, что случайно выбранный студент попал в сборную института. б) Студент попал в сборную института. В какой группе он вероятнее всего учится? (*Ответ:* а) 0,7555; б) в первой.)

4.15. На сборку поступают детали с трех конвейеров. Первый дает 25 %, второй – 30 и третий – 45 % деталей, поступающих на сборку. С первого конвейера в среднем поступает 2 % брака, со второго – 3, с третьего – 1 %. Найти вероятность того, что: а) на сборку поступила бракованная деталь; б) поступившая на сборку бракованная деталь – со второго конвейера. (*Ответ:* а) 0,0185; б) 0,4865.)

4.16. В двух коробках имеются однотипные конденсаторы. В первой 20 конденсаторов, из них 2 неисправных, во второй – 10, из них 3 неисправных. а) Найти вероятность того, что наугад взятый конденсатор из случайно выбранной коробки годен к использованию. б) Наугад взятый конденсатор оказался годным. Из какой коробки он вероятнее всего взят? (*Ответ:* а) 0,8333; б) из первой.)

4.17. В телевизионном ателье имеется 2 кинескопа первого типа и 8 второго типа. Вероятность выдержать гарантийный срок для кинескопов первого типа равна 0,9, а для второго типа – 0,6. Найти вероятность того, что: а) взятый наугад кинескоп выдержит гарантийный срок; б) взятый наугад кинескоп, выдержавший гарантийный срок, первого типа. (*Ответ:* а) 0,66; б) 0,2727.)

4.18. У сборщика 16 деталей, изготовленных на заводе № 1, и 10 деталей, изготовленных на заводе № 2. Вероятности того, что детали выдержат гарантийный срок, для деталей с завода № 1 равны 0,8; с завода № 2 – 0,9. а) Найти вероятность того, что взятая наугад деталь проработает гарантийный срок. б) Взятая наугад деталь проработала гарантийный срок. На каком из заводов она вероятнее всего изготовлена? (*Ответ:* а) 0,8384; б) на первом.)

4.19. Телеграфное собщение состоит из сигналов «точка» и «тире», они встречаются в передаваемых сообщениях в отношении 5 : 3. Статические свойства помех таковы, что искажаются в среднем 2/5 сообщений «точка» и 1/3 сообщений «тире». Найти вероятность того, что: а) передаваемый сигнал принят; б) принятый сигнал – «тире». (*Ответ:* а) 0,5; б) 0,5.)

4.20. Для поисков спускаемого аппарата космического корабля выделено 4 вертолета первого типа и 6 вертолетов второго типа. Каждый вертолет первого типа обнаруживает находящийся в районе поиска аппарат с вероятностью 0,6, второго типа – с вероятностью 0,7. а) Найти вероятность того, что наугад выбранный вертолет обнаружит аппарат. б) К какому типу вероятнее всего принадлежит вертолет, обнаруживший спускаемый аппарат? (*Ответ:* а) 0,66; б) ко второму.)

4.21. Прибор состоит из двух узлов одного типа и трех узлов второго типа. Надежность работы в течение времени T для узла первого типа равна 0,8, а для узла второго типа – 0,7. а) Найти вероятность того, что наугад выбранный узел проработает в течение времени T. б) Узел проработал гарантийное время T. К какому типу он вероятнее всего относится? (*Ответ:* а) 0,74; б) ко второму.)

4.22. Пассажир может обратиться за получением билета в одну из трех касс вокзала A или в одну из пяти касс вокзала B. Вероятность того, что к моменту прихода пассажира в кассах вокзала A имеются в продаже билеты, равна 0,6, в кассах вокзала B – 0,5. а) Найти вероятность того, что в наугад выбранной кассе имеется в продаже билет. б) Пассажир купил билет. В кассе какого вокзала он вероятнее всего куплен? (*Ответ:* а) 0,5375; б) в кассе вокзала B.)

4.23. В вычислительной лаборатории 40 % микрокалькуляторов и 60 % дисплеев. Во время расчета 90 % микрокалькуляторов и 80 % дисплеев работают безотказно. а) Найти вероятность того, что наугад взятая вычислительная машина проработает безотказно во время расчета. б) Выбранная машина проработала безотказно во время расчета. К какому типу вероятнее всего она принадлежит? (*Ответ:* а) 0,84; б) к дисплеям.)

4.24. В состав блока входит 6 радиоламп первого типа и 10 второго. Гарантийный срок обычно выдерживает 80 % радиоламп первого типа и 90 % второго типа. Найти вероятность того, что: а) наугад взятая радиолампа выдержит гарантийный срок; б) радиолампа, выдержавшая гарантийный срок, первого типа. (*Ответ:* а) 0,8625; б) 0,3478.)

4.25. На сборку поступают детали с трех автоматов, причем с первого 30 %, со второго 40 и с третьего 30 % всех деталей. Вероятность брака для первого автомата равна 0,02, для второго – 0,03, для третьего – 0,04. а) Найти вероятность того, что взятая наугад деталь – бракованная. б) Взятая наугад деталь оказалась бракованной. С какого автомата она вероятнее всего поступила? (*Ответ:* а) 0,03; б) со второго или третьего.)

4.26. Имеется 6 коробок диодов типа A и 8 коробок диодов типа B. Вероятность безотказной работы диода типа A равна 0,8, типа B – 0,7. а) Найти вероятность того, что взятый наугад диод проработает гарантийное число часов. б) Взятый наугад диод проработал гарантийное число часов. К какому типу он вероятнее всего относится? (*Ответ:* а) 0,7429; б) к типу B.)

4.27. Для участия в студенческих спортивных соревнованиях выделено из первой группы 5 студентов, из второй и третьей – соответственно 6 и 10 студентов. Вероятность выполнения нормы мастера спорта для студентов первой группы равна 0,3, второй – 0,4, третьей – 0,2. Найти вероятность того, что: а) наугад выбранный студент выполнит норму мастера спорта; б) студент, выполнивший норму мастера спорта, учится во второй группе. (*Ответ:* а) 0,28; б) 0,4.)

4.28. На участке, где изготавливаются болты, первый станок производит 25 %, второй – 35, третий – 40 % всех изделий. В продукции каждого из станков брак составляет соответственно 5, 4 и 2 %. Найти вероятность того, что: а) взятый наугад болт – с дефектом; б) случайно взятый болт с дефектом изготовлен на третьем станке. (*Ответ:* а) 0,0345; б) 0,2319.)

4.29. На сборку поступают детали с четырех автоматов. Первый обрабатывает 40 %, второй – 30, третий – 20 и четвертый – 10 % всех деталей, поступающих на сборку. Первый автомат дает 0,1 % брака, второй – 0,2, третий – 0,25, четвертый – 0,5 %. Найти вероятность того, что: а) на сборку поступит стандартная деталь; б) поступившая на сборку стандартная деталь изготовлена первым автоматом. (*Ответ:* а) 0,9935; б) 0,4022.)

4.30. Производится стрельба по мишеням трех типов, из которых 5 мишеней типа *A*, 3 мишени типа *B* и 3 мишени типа *C*. Вероятность попадания в мишень типа *A* равна 0,4, в мишень типа *B* – 0,1, в мишень типа *C* – 0,15. Найти вероятность того, что: а) мишень будет поражена при одном выстреле, если неизвестно, по мишени какого типа он был сделан; б) при одном выстреле (если неизвестно, по мишени какого типа он сделан) будет поражена мишень типа *A*. (*Ответ:* а) 0,25; б) 0,7273.)

5

5.1. Всхожесть семян некоторого растения составляет 80 %. Найти вероятность того, что из 6 посеянных семян взойдет: а) три; б) не менее трех; в) четыре. (*Ответ:* а) 0,08192; б) 0,98324; в) 0,24588.)

5.2. В семье четверо детей. Принимая равновероятным рождение мальчика и девочки, найти вероятность того, что мальчиков в семье: а) три; б) не менее трех; в) два. (*Ответ:* а) 0,25; б) 0,3125; в) 0,375.)

5.3. Среди заготовок, изготавливаемых рабочим, в среднем 4 % не удовлетворяет требованиям стандарта. Найти вероятность того, что среди 6 заготовок, взятых для контроля, требованиям стандарта не удовлетворяют: а) не менее пяти; б) не более пяти; в) две. (*Ответ:* а) 0,9784; б) 0,2172; в) 0,0204.)

5.4. Вероятность выигрыша по одной облигации трехпроцентного займа равна 0,25. Найти вероятность того, что из восьми купленных облигаций выигрышными окажутся: а) три; б) две; в) не менее двух. (*Ответ:* а) 0,2076; б) 0,3115; в) 0,6329.)

5.5. Вероятность успешной сдачи студентом каждого из пяти экзаменов равна 0,7. Найти вероятность успешной сдачи: а) трех экзаменов; б) двух экзаменов; в) не менее двух экзаменов. (*Ответ:* а) 0,3087; б) 0,1323; в) 0,9692.)

5.6. Вероятность работы каждого из семи моторов в данный момент равна 0,8. Найти вероятность того, что в данный момент включены: а) хотя бы один мотор; б) два мотора; в) три мотора. (*Ответ:* а) 0,99998; б) 0,0043; в) 0,1435.)

5.7. В телеателье имеется 7 телевизоров. Для каждого телевизора вероятность того, что в данный момент он включен, равна 0,6. Найти вероятность того, что в данный момент включены: а) четыре телевизора; б) хотя бы один телевизор; в) не менее трех телевизоров. (*Ответ:* а) 0,2916; б) 0,9999; в) 0,9477.)

5.8. При массовом производстве полупроводниковых диодов вероятность брака при формовке равна 0,1. Найти вероятность того, что из восьми диодов, проверяемых ОТК, бракованных будет: а) два; б) не менее двух; в) не более двух. (*Ответ:* а) 0,1488; б) 0,1871; в) 0,9617.)

5.9. Вероятность поражения мишени для данного стрелка в среднем составляет 80 %. Стрелок произвел 6 выстрелов по мишени. Найти вероятность того, что мишень была поражена: а) пять раз; б) не менее пяти раз; в) не более пяти раз. (*Ответ:* а) 0,3932; б) 0,6554; в) 0,7379.)

5.10. Вероятность сдачи экзамена для каждого из шести студентов равна 0,8. Найти вероятность того, что экзамен сдадут: а) пять студентов; б) не менее пяти студентов; в) не более пяти студентов. (*Ответ:* а) 0,3932; б) 0,6553; в) 0,7379.)

5.11. Вероятность поражения в каждой шахматной партии для игрока равна 0,5. Найти вероятность того, что он выиграл в шести партиях: а) хотя бы один раз; б) два раза; в) не менее двух раз. (*Ответ:* а) 0,9844; б) 0,2344; в) 0,8906.)

5.12. Всхожесть семян лимона составляет 80 %. Найти вероятность того, что из 9 посеянных семян взойдет: а) семь; б) не более семи; в) более семи. (*Ответ:* а) 0,302; б) 0,5638; в) 0,4362.)

5.13. При штамповке изделий бывает в среднем 20 % брака. Для контроля отобрано 8 изделий. Найти: а) вероятность того, что два изделия окажутся бракованными; б) наивероятнейшее число бракованных изделий; в) вероятность наивероятнейшего числа бракованных изделий. (*Ответ:* а) 0,2936; б) 1; в) 0,3355.)

5.14. Среди изделий, подвергавшихся термической обработке, в среднем 80 % высшего сорта. Найти вероятность того, что среди пяти изделий: а) хотя бы четыре высшего сорта; б) четыре высшего сорта; в) не более четырех высшего сорта. (*Ответ:* а) 0,7373; б) 0,4096; в) 0,6723.)

5.15. Оптовая база обслуживает 6 магазинов. Вероятность получения заявки базой на данный день для каждого из магазинов равна 0,6. Найти вероятность того, что в этот день будет: а) пять заявок; б) не менее пяти заявок; в) не более пяти заявок. (*Ответ:* а) 0,1866; б) 0,2333; в) 0,9534.)

5.16. После зубофрезеровки шестерен у рабочего в среднем получается 20 % нестандартных шестерен. Найти вероятность того, что среди взятых шести шестерен нестандартных будет: а) три; б) не более трех; в) хотя бы одна. (*Ответ:* а) 0,0819; б) 0,7209; в) 0,7379.)

5.17. При передаче сообщения вероятность искажения одного знака равна 0,1. Найти вероятность того, что сообщение из 10 знаков: а) не будет искажено; б) содержит три искажения; в) содержит не более трех искажений. (*Ответ:* а) 0,3487; б) 0,0574; в) 0,9872.)

5.18. Продукция, поступающая из цеха в ОТК, не удовлетворяет условиям стандарта в среднем в 8 % случаев. Найти вероятность того, что из наугад взятых семи изделий не удовлетворяют условиям стандарта: а) шесть изделий; б) не менее шести изделий; в) менее шести изделий. (*Ответ:* а) 0,000002; б) 0,000002; в) 0,999998.)

5.19. Вероятность поражения цели при одном выстреле равна 0,4. Произведено 8 выстрелов. Найти вероятность поражения цели: а) три раза; б) наивероятнейшее число раз; в) хотя бы один раз. (*Ответ:* а) 0,2787; б) 0,2787; в) 0,9832.)

5.20. Вероятность того, что изделие пройдет контроль, равна 0,8. Найти вероятность того, что из шести изделий контроль пройдут: а) пять изделий; б) не менее пяти изделий; в) не более пяти изделий. (*Ответ:* а) 0,3932; б) 0,6553; в) 0,7379.)

5.21. Среди деталей, изготавливаемых рабочим, в среднем 2 % нестандартных. Найти вероятность того, что среди взятых на испытание пяти деталей: а) три нестандартные; б) будет наивероятнейшее число нестандартных деталей (из пяти); в) ни одной нестандартной детали. (*Ответ:* а) 0,00008; б) 0,9039; в) 0,9039.)

5.22. Вероятность перевыполнения годового плана для каждого из восьми рабочих равна 0,8. Найти вероятность того, что перевыполнят годовой план: а) хотя бы один рабочий; б) двое рабочих; в) трое рабочих. (*Ответ:* а) 0,999997; б) 0,001146; в) 0,00917.)

5.23. Вероятность поражения цели при одном выстреле равна 0,8. Произведено 7 выстрелов. Найти вероятность того, что имело место: а) четыре поражения цели; б) шесть поражений; в) не более шести поражений. (*Ответ:* а) 0,1147; б) 0,367; в) 0,7903.)

5.24. Вероятность поражения цели каждым из семи выстрелов равна 0,8. Найти вероятность поражения цели:

а) двумя выстрелами; б) хотя бы одним выстрелом; в) не менее чем тремя выстрелами. (*Ответ:* а) 0,0043; б) 0,99998; в) 0,9953.)

5.25. Вероятность потопить судно одной торпедой равна 0,2. Выпущено 5 торпед. Найти вероятность того, что имеет место: а) три попадания в судно; б) не менее трех попаданий; в) четыре попадания. (*Ответ:* а) 0,0512; б) 0,05792; в) 0,0064.)

5.26. Вероятность попадания в цель при одном выстреле из винтовки равна 0,3. Произведено 6 выстрелов. Найти вероятность того, что произошло: а) три попадания в цель; б) пять попаданий; в) не менее пяти попаданий. (*Ответ:* а) 0,1852; б) 0,010206; в) 0,010935.)

5.27. Вероятность поражения мишени при одном выстреле равна 0,6. Произведено 5 выстрелов. Найти вероятность того, что будет иметь место: а) четыре поражения цели; б) не менее четырех поражений; в) три поражения. (*Ответ:* а) 0,2592; б) 0,33696; в) 0,3456.)

5.28. Вероятность попадания в цель равна 0,3. Одновременно сбрасывается 6 бомб. Найти вероятность того, что в цель попадают: а) четыре бомбы; б) не менее четырех бомб; в) не более четырех бомб. (*Ответ:* а) 0,059535; б) 0,07047; в) 0,9891.)

5.29. Среди деталей, изготавливаемых рабочим, в среднем 4 % бракованных. Найти вероятность того, что среди взятых на контроль пяти деталей: а) две бракованные; б) хотя бы одна бракованная; в) не более одной бракованной. (*Ответ:* а) 0,014156; б) 0,1846; в) 0,9852.)

5.30. Вероятность выиграть по одной облигации государственного займа равна 1/3. Найти вероятность того, что, имея 6 облигаций этого займа, можно выиграть: а) по двум облигациям; б) по трем облигациям; в) не менее чем по двум облигациям. (*Ответ:* а) 0,3292; б) 0,2195; в) 0,6485.)

6

6.1. Вероятность появления событий в каждом из независимых испытаний равна 0,25. Найти вероятность того, что событие наступит 50 раз в 243 испытаниях. (*Ответ:* 0,0167.)

6.2. Вероятность появления события в каждом из независимых испытаний равна 0,8. Найти вероятность того, что в 144 испытаниях событие наступит 120 раз. (*Ответ:* 0,0504.)

6.3. Вероятность появления события в каждом из независимых испытаний равна 0,2. Найти вероятность того, что событие наступит 25 раз в 100 испытаниях. (*Ответ:* 0,0456.)

6.4. Вероятность появления события в каждом из 2100 независимых испытаний равна 0,7. Найти вероятность того, что событие наступит не менее 1470 раз и не более 1500 раз. (*Ответ:* 0,4236.)

6.5. Вероятность производства бракованной детали равна 0,008. Найти вероятность того, что из взятых на проверку 1000 деталей 10 бракованных. (*Ответ:* 0,0993.)

6.6. Вероятность появления события в каждом из независимых испытаний равна 0,2. Найти вероятность того, что событие наступит 20 раз в 100 испытаниях. (*Ответ:* 0,0997.)

6.7. Вероятность промаха при одном выстреле по мишени равна 0,1. Сколько выстрелов необходимо произвести, чтобы с вероятностью 0,9544 можно было утверждать, что относительная частота промаха отклонится от постоянной вероятности по абсолютной величине не более чем на 0,03? (*Ответ:* 400.)

6.8. Среднее число машин, прибывающих в автопарк за 1 мин, равно двум. Найти вероятность того, что за 5 мин прибудет не менее двух машин, если поток прибытия машин простейший. (*Ответ:* 0,999505.)

6.9. Вероятность нарушения стандарта при штамповке карболитовых колец равна 0,3. Найти вероятность того, что для 800 заготовок число бракованных колец заключено между 225 и 250. (*Ответ:* 0,6543.)

6.10. Вероятность поражения мишени при одном выстреле равна 0,8. Найти вероятность того, что при 100 выстрелах мишень будет поражена не менее 75 раз. (*Ответ:* 0,8944.)

6.11. Вероятность появления события в каждом независимом испытании равна 0,7. Найти вероятность того, что в 100 испытаниях событие наступит не более 70 раз. (*Ответ:* 0,5.)

6.12. Найти вероятность одновременного останова 30 машин из 100 работающих, если вероятность останова для каждой машины равна 0,2. (*Ответ:* 0,0044.)

6.13. Аппаратура состоит из 1000 элементов. Вероятность отказа одного элемента за время T равна 0,001 и не зависит от работы других элементов. Найти вероятность отказа не менее двух элементов. (*Ответ:* 0,264.)

6.14. Найти вероятность поражения мишени 75 раз при 100 выстрелах, если вероятность поражения при одном выстреле равна 0,8. (*Ответ:* 0,0456.)

6.15. Станок состоит из 2000 независимо работающих узлов. Вероятность отказа одного узла в течение года равна 0,0005. Найти вероятность отказа в течение года двух узлов. (*Ответ:* 0,1838.)

6.16. Промышленная телевизионная установка содержит 2000 транзисторов. Вероятность выхода из строя каждого из транзисторов равна 0,0005. Найти вероятность выхода из строя хотя бы одного транзистора. (*Ответ:* 0,632.)

6.17. Вероятность отклонений от принятого стандарта при штамповке клемм равна 0,02. Найти вероятность наличия в партии из 200 клемм от 70 до 80 клемм, не соответствующих стандарту. (*Ответ:* 0.)

6.18. Вероятность появления события в каждом из 2000 независимых испытаний равна 0,7. Найти вероятность того, что событие наступит не менее 1500 раз. (*Ответ:* 0,00003.)

6.19. Вероятность появления события в каждом из 21 независимого испытания равна 0,7. Найти вероятность того, что событие наступит не менее 11 раз. (*Ответ:* 0,93435.)

6.20. Прядильщица обслуживает 1000 веретен. Вероятность обрыва нити на одном веретене в течение 1 мин равна 0,004. Найти вероятность того, что в течение 1 мин обрыв произойдет на шести веретенах. (*Ответ:* 0,1041.)

6.21. Вероятность появления события в каждом из 900 независимых испытаний равна 0,5. Найти вероятность того, что относительная частота появления события отклонится от его вероятности не более чем на 0,02. (*Ответ:* 0,7698.)

6.22. Вероятность того, что изделие – высшего сорта, равна 0,5. Найти вероятность того, что из 1000 изделий 500 – высшего сорта. (*Ответ:* 0,0252.)

6.23. Вероятность появления события в каждом из независимых испытаний равна 0,8. Найти вероятность того, что в 100 испытаниях событие наступит не менее 70 и не более 80 раз. (*Ответ:* 0,4938.)

6.24. Вероятность того, что изделие – высшего качества, равна 0,5. Найти вероятность того, что из 400 изделий число изделий высшего качества составит от 194 до 208. (*Ответ:* 0,5138.)

6.25. Среднее число вызовов, поступающих на коммутатор за 1 мин, равно 2. Найти вероятность того, что за 6 мин поступит не менее трех вызовов, если поток вызовов предполагается простейшим. (*Ответ:* 0,9995.)

6.26. Найти вероятность того, что при 400 испытаниях событие появится не менее 104 раз, если вероятность его наступления в каждом независимом испытании равна 0,2. (*Ответ:* 0,00135.)

6.27. Среднее число самолетов, прибывающих в аэропорт за 1 мин, равно 2. Найти вероятность того, что за 6 мин прибудет 5 самолетов, если поток прибытия самолетов простейший. (*Ответ:* 0,0124.)

6.28. Всхожесть семян данного растения равна 0,9. Найти вероятность того, что из 900 посаженных семян число проросших будет заключено между 790 и 830. (*Ответ:* 0,9736.)

6.29. Средняя плотность болезнетворных бактерий в 1 м^3 воздуха равна 100. Берется на пробу 2 дм^3 воздуха. Найти вероятность того, что в нем будет обнаружена хотя бы одна бактерия. (*Ответ:* 0,1813.)

6.30. Вероятность рождения мальчика равна 0,515. Найти вероятность того, что из 1000 рождающихся детей мальчиков будет не менее 500, но не более 550. (*Ответ:* 0,8157.)

Решение типового варианта

1. В бригаде 25 человек. Сколькими способами можно избрать троих рабочих в три комиссии (по одному в каждую)?

▸ Одна комбинация отличается от другой либо хотя бы одним человеком, либо порядком избрания в комиссии. Поэтому число способов избрания троих рабочих равно числу размещений из 25 человек по 3, т.е. $A_{25}^3 = 25 \cdot 24 \cdot 23 = 13\ 800$. ◂

2. В шахматном турнире участвуют 10 гроссмейстеров, 6 международных мастеров и 4 мастера. Шахматисты для первого тура и номер столика для каждой пары участников определяются путем жеребьевки. Найти вероятность того, что за первым столиком встретятся шахматисты одной и той же категории.

▸ Число всех равновозможных случаев определения двух соперников из 20 участников равно числу сочетаний из 20 элементов по 2, т.е. C_{20}^2. Число групп по 2 человека, которые могут быть составлены из 10 гроссмейстеров, равно C_{10}^2. Число групп, которые могут быть составлены из 6 международных мастеров, равно C_6^2. Из 4 мастеров может быть составлено C_4^2 пар. Сумма $C_{10}^2 + C_6^2 + C_4^2$ равна числу благоприятствующих случаев для встречи за первым столиком шахматистов одной и той же категории. Следовательно, искомая вероятность

$$p = (C_{10}^2 + C_6^2 + C_4^2)/C_{20}^2 = 33/95\,. ◄$$

3. В ремонтную мастерскую поступило 15 тракторов. Известно, что 6 из них нуждается в замене двигателя, а остальные – в замене отдельных узлов. Случайным образом отбирают два трактора. Найти вероятность того, что замена двигателя необходима: а) в двух тракторах; б) в одном тракторе; в) хотя бы в одном тракторе.

► а) Обозначим через A событие, состоящее в том, что выбранный трактор требует замены двигателя. Согласно условиям задачи вероятность того, что первым будет отобран трактор, требующий замены двигателя, $P(A) = 6/15 = 0{,}4$.

Вероятность того, что второй выбранный трактор также потребует замены двигателя, $P(A) = 5/14$. Тогда вероятность события, состоящего в том, что первый и второй отобранные тракторы потребуют замены двигателя, $p = \frac{2}{5}\frac{5}{14} = \frac{1}{7}$.

б) Обозначим через B событие, состоящее в том, что только один из двух выбранных тракторов требует замены двигателя. Это событие заключается в том, что первый трактор нуждается в замене двигателя, а второй – в замене лишь отдельных узлов либо первый трактор требует замены отдельных узлов, а второй – замены двигателя:

$$P(B) = \frac{2}{5}\frac{9}{14} + \frac{9}{15}\frac{6}{14} = \frac{18}{35}\,.$$

в) Обозначим через C событие, состоящее в том, что ни один трактор не потребует замены двигателя. Вероятность того, что первый трактор не потребует замены двигателя, равна $9/15 = 3/5$. Вероятность того, что второй трактор также не потребует замены двигателя, $8/14 = 4/7$. Тогда вероятность того, что оба трактора не потребуют замены двигателя,

$$P(C) = \frac{3}{5}\,\frac{4}{7} = \frac{12}{35}\,.$$

Вероятность того, что хотя бы для одного трактора потребуется замена двигателя,

$$p = 1 - P(C) = 1 - 12/35 = 23/35 .◀$$

4. При обследовании двух одинаковых групп мужчин и женщин было установлено, что среди мужчин 5 % дальтоников, а среди женщин – 0,25 %. Найти вероятность того, что наугад выбранный человек: а) страдает дальтонизмом; б) является мужчиной, если известно, что он страдает дальтонизмом.

▶ а) Пусть событие A состоит в том, что наугад выбранное лицо страдает дальтонизмом. При этом возможны следующие гипотезы: H_1 – выбранное лицо является мужчиной; H_2 – выбранное лицо является женщиной.

Из условия задачи находим:

$$P(H_1) = P(H_2) = 0{,}5\,,\ P(A/H_1) = 0{,}05\,,\ P(A/H_2) = 0{,}0025\,.$$

По формуле полной вероятности вычисляем вероятность того, что наугад выбранное лицо страдает дальтонизмом:

$$P(A) = \sum_{k=1}^{n} (H_k)P(A/H_k) = 0{,}5 \cdot 0{,}05 + 0{,}5 \cdot 0{,}0025 = 0{,}2625;$$

б) Условная вероятность произошедшего события A при осуществлении данной гипотезы H_1

$$P(H_1/A) = \frac{P(H_1)P(A/H_1)}{P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2)} =$$

$$= \frac{0{,}5 \cdot 0{,}05}{0{,}02625} \approx 0{,}952388\ .◀$$

5. Наблюдениями установлено, что в некоторой местности в сентябре бывает 12 дождливых дней. Найти вероятность того, что из случайно зафиксированных в этом месяце 8 дней дождливыми окажутся: а) три дня; б) не менее трех дней; в) не более трех дней.

▶ Наблюдения в условиях данной задачи являются независимыми. Вероятность выпадения дождя в любой день сентября $p = 12/30 = 0{,}4$, а вероятность того, что в любой день сентября дождя не будет, $q = 1 - p = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$.

Вероятность $P_n(m)$ того, что в n наблюдениях событие наступит m раз, определяется формулой биномиального распределения (формулой Бернулли):

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}.$$

а) По условию задачи $n = 8$, $m = 3$, $p = 0{,}4$, $q = 0{,}6$. Тогда

$$P_8(3) = C_8^3 \cdot 0{,}4^4 \cdot 0{,}6^5 = 0{,}278692.$$

б) Поскольку $n = 8$, $3 \le m \le 8$, $p = 0{,}4$, $q = 0{,}6$, то

$$P_8(3 \le m \le 8) = P_8(3) + P_8(4) + P_8(5) + P_8(6) + P_8(7) +$$

$$+ P_8(8) = 1 - P_8(0) - P_8(1) - P_8(2) = 1 - 0{,}6^8 -$$

$$- 8 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6^7 - 28 \cdot 0{,}4^2 \cdot 0{,}6^6 = 0{,}624893.$$

в) Так как $n = 8$, $0 \le m \le 3$, $p = 0{,}4$, $q = 0{,}6$, то

$$P_8(0 \le m \le 8) = P_8(0) + P_8(1) + P_8(2) + P_8(3) =$$

$$= 0{,}016796 + 0{,}149292 + 0{,}209019 + 0{,}278692 =$$

$$= 0{,}653309. ◄$$

6. На факультете 730 студентов. Вероятность дня рождения каждого студента в данный день равна 1/365. Вычислить вероятность того, что найдутся три студента, у которых дни рождения совпадают.

► В данном случае $n = 730$, $m = 3$, $p = 1/365$, $q = 1 - 1/365 = 364/365$. Так как n велико, воспользуемся локальной теоремой Муавра – Лапласа:

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x),$$

где $x = (m - np)/\sqrt{npq}$. Значение функции $\varphi(x)$ находим из прил. 3. Имеем:

$$x = \frac{3 - 730/365}{\sqrt{730 \cdot \frac{1}{365} \frac{364}{365}}} = 0{,}71,$$

$$\varphi(0{,}71) = 0{,}3101, \quad P_{730}(3) \approx 0{,}2210. ◄$$

ИДЗ-18.2

1. Найти закон распределения указанной дискретной СВ X и ее функцию распределения $F(x)$. Вычислить математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и среднее квадратичное отклонение $\sigma(X)$. Построить график функции распределения $F(x)$.

1.1. Автомобиль должен проехать по улице, на которой установлено четыре независимо работающих светофора. Каждый светофор с интервалом в 2 мин подает красный и зеленый сигналы; СВ X – число остановок автомобиля на этой улице. (*Ответ:* $M(X) = 2$, $D(X) = 1$.)

1.2. Производят три выстрела по мишени. Вероятность поражения мишени первым выстрелом равна 0,4, вторым – 0,5, третьим – 0,6; СВ X – число поражений мишени. (*Ответ:* $M(X) = 1{,}5$, $D(X) = 0{,}73$.)

1.3. Вероятность безотказной работы в течение гарантийного срока для телевизоров первого типа равна 0,9, второго типа – 0,7, третьего типа – 0,8; СВ X – число телевизоров, проработавших гарантийный срок, среди трех телевизоров разных типов. (*Ответ:* $M(X) = 2{,}4$, $D(X) = 0{,}46$.)

1.4. Вероятность поражения цели при одном выстреле равна 0,6; СВ X – число поражений цели при четырех выстрелах. (*Ответ:* $M(X) = 2{,}4$, $D(X) = 0{,}96$.)

1.5. Вероятность выпуска прибора, удовлетворяющего требованиям качества, равна 0,9. В контрольной партии – 3 прибора; СВ X – число приборов, удовлетворяющих требованиям качества. (*Ответ:* $M(X) = 2{,}7$, $D(X) = 0{,}27$.)

1.6. Вероятность перевыполнения плана для СУ-1 равна 0,9, для СУ-2 – 0,8, для СУ-3 – 0,7; СВ X – число СУ, перевыполнивших план. (*Ответ:* $M(X) = 2{,}4$, $D(X) = 0{,}46$.)

1.7. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,8; СВ X – число попаданий в цель при трех выстрелах. (*Ответ:* $M(X) = 2{,}4$, $D(X) = 0{,}48$.)

1.8. Вероятность поступления вызова на АТС в течение 1 мин равна 0,4; СВ X – число вызовов, поступивших на АТС за 4 мин. (*Ответ:* $M(X) = 1{,}6$, $D(X) = 0{,}96$.)

1.9. Вероятность сдачи данного экзамена для каждого из четырех студентов равна 0,8; СВ X – число студентов, сдавших экзамен. (*Ответ:* $M(X) = 3{,}2$, $D(X) = 0{,}64$.)

1.10. Вероятность успешной сдачи первого экзамена для данного студента равна 0,9, второго экзамена – 0,8, третьего – 0,7; СВ X – число сданных экзаменов. (*Ответ:* $M(X) = 2{,}4$, $D(X) = 0{,}46$.)

1.11. При установившемся технологическом процессе предприятие выпускает 2/3 своих изделий первым сортом и

1/3 вторым; СВ X – число изделий первого сорта из взятых наугад четырех. (*Ответ:* $M(X) = 8/3$, $D(X) = 8/9$.)

1.12. Из партии в 20 изделий, среди которых имеется четыре нестандартных, для проверки качества выбраны случайным образом 3 изделия; СВ X – число нестандартных изделий среди проверяемых. (*Ответ:* $M(X) = 0{,}6$, $D(X) = 0{,}48$.)

1.13. Вероятность приема каждого из четырех радиосигналов равна 0,6; СВ X – число принятых радиосигналов. (*Ответ:* $M(X) = 2{,}4$, $D(X) = 0{,}96$.)

1.14. В партии из 15 телефонных аппаратов 5 неисправных; СВ X – число неисправных аппаратов среди трех случайным образом отобранных. (*Ответ:* $M(X) = 1$, $D(X) = 2/3$.)

1.15. Двое рабочих, выпускающих однотипную продукцию, допускают производство изделий второго сорта с вероятностями, равными соответственно 0,4 и 0,3. У каждого рабочего взято по 2 изделия; СВ X – число изделий второго сорта среди них. (*Ответ:* $M(X) = 1{,}4$, $D(X) = 0{,}9$.)

1.16. 90 % панелей, изготавливаемых на заводе железобетонных изделий, – высшего сорта; СВ X – число панелей высшего сорта из четырех, взятых наугад. (*Ответ:* $M(X) = 3{,}6$, $D(X) = 0{,}36$.)

1.17. Вероятность отказа прибора за время испытания на надежность равна 0,2; СВ X – число приборов, отказавших в работе, среди пяти испытываемых. (*Ответ:* $M(X) = 1$, $D(X) = 0{,}8$.)

1.18. В первой коробке 10 сальников, из них 2 бракованных, во второй – 16, из них 4 бракованных, в третьей – 12 сальников, из них 3 бракованных; СВ X – число бракованных сальников при условии, что из каждой коробки взято наугад по одному сальнику. (*Ответ:* $M(X) = 0{,}7$, $D(X) = 0{,}535$.)

1.19. Рабочий обслуживает четыре станка. Вероятность выхода из строя в течение смены для первого станка равна 0,6, для второго – 0,5, для третьего – 0,4, для четвертого – 0,5; СВ X – число станков, вышедших из строя за смену. (*Ответ:* $M(X) = 2$, $D(X) = 0{,}98$.)

1.20. Вероятность выигрыша по одному билету лотереи равна 1/6; СВ X – число выигрышных билетов из четырех. (*Ответ:* $M(X) = 2/3$, $D(X) = 5/9$.)

1.21. В первой студенческой группе из 24 человек 4 отличника, во второй из 22 – 3 отличника, в третьей из 24 – 6 отличников и в четвертой из 20 – 2 отличника; СВ X – число отличников, приглашенных на конференцию, при условии, что из каждой группы выделили случайным образом по одному человеку. (*Ответ:* $M(X) = 0{,}65$, $D(X) = 0{,}53$.)

1.22. Вероятность выхода из строя каждого из трех блоков прибора в течение гарантийного срока равна 0,3; СВ X – число блоков, вышедших из строя в течение гарантийного срока. (*Ответ:* $M(X) = 0{,}9$, $D(X) = 0{,}63$.)

1.23. Вероятность того, что деталь с первого автомата удовлетворяет стандарту, равна 0,9, для второго автомата – 0,8, для третьего – 0,7; СВ X – число деталей, удовлетворяющих стандарту, при условии, что с каждого автомата взято наугад по одной детали. (*Ответ:* $M(X) = 2{,}4$, $D(X) = 0{,}46$.)

1.24. Вероятности поражения цели каждым из трех стрелков равны соответственно 0,7; 0,8; 0,6; СВ X – число поражений цели при условии, что каждый из стрелков сделал по одному выстрелу. (*Ответ:* $M(X) = 2{,}1$, $D(X) = 0{,}61$.)

1.25. Вероятности выхода из строя в течение гарантийного срока каждого из трех узлов прибора равны соответственно 0,2; 0,3; 0,1; СВ X – число узлов, вышедших из строя в течение гарантийного срока. (*Ответ:* $M(X) = 0{,}6$, $D(X) = 0{,}46$.)

1.26. Вероятность попадания мячом в корзину при каждом броске для данного баскетболиста равна 0,4; СВ X – число попадания при четырех бросках. (*Ответ:* $M(X) = 1{,}6$, $D(X) = 0{,}96$.)

1.27. В партии из 25 изделий 6 бракованных. Для контроля их качества случайным образом отбирают четыре изделия; СВ X – число бракованных изделий среди отобранных. (*Ответ:* $M(X) = 0{,}96$, $D(X) = 0{,}73$.)

1.28. Выход из строя коробки передач происходит по трем основным причинам: поломка зубьев шестерен, недопустимо большие контактные напряжения и излишняя жесткость конструкции. Каждая из причин приводит к поломке коробки передач с одной и той же вероятностью, равной 0,1; СВ X – число причин, приведших к поломке в одном испытании. (*Ответ:* $M(X) = 0{,}3$, $D(X) = 0{,}27$.)

1.29. Из 39 приборов, испытываемых на надежность, 5 высшей категории. Наугад взяли 4 прибора; СВ X – число приборов высшей категории среди отобранных. (*Ответ:* $M(X) = 2/3$, $D(X) = 5/9$.)

1.30. Проводятся три независимых измерения исследуемого образца. Вероятность допустить ошибку в каждом измерении равна 0,01; СВ X – число ошибок, допущенных в измерениях. (*Ответ:* $M(X) = 0{,}03$, $D(X) = 0{,}0297$.)

2. Дана функция распределения $F(x)$ СВ X. Найти плотность распределения вероятностей $f(x)$, математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и вероятность попадания СВ X на отрезок $[a; b]$. Построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

$$\textbf{2.1.}\ F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ \frac{1}{8}x^3 & \text{при } 0 \le x \le 2, \; a = 0,\ b = 1. \\ 1 & \text{при } x > 2; \end{cases}$$

(*Ответ:* $M(X) = 1{,}5$, $D(X) = 0{,}15$, $P(0 \le X \le 1) = 0{,}125$.)

$$\textbf{2.2.}\ F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ \frac{1}{33}(2x^2 + 5x) & \text{при } 0 \le x \le 3, \; a = 1,\ b = 2. \\ 1 & \text{при } x > 3; \end{cases}$$

(*Ответ:* $M(X) = 1{,}77$, $D(X) = 0{,}676$, $P(1 \le X \le 2) = 0{,}333$.)

$$\textbf{2.3.}\ F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ \frac{1}{9}x^2 & \text{при } 0 \le x \le 3, \; a = 0,\ b = 1. \\ 1 & \text{при } x > 3; \end{cases}$$

(*Ответ:* $M(X) = 2$, $D(X) = 0{,}5$, $P(0 \le X \le 1) = 0{,}111$.)

$$\textbf{2.4.}\ F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ \frac{1}{24}(x^2 + 2x) & \text{при } 0 \le x \le 4, \; a = 0,\ b = 1. \\ 1 & \text{при } x > 4; \end{cases}$$

(*Ответ:* $M(X) = 2{,}44$, $D(X) = 1{,}136$, $P(0 \le X \le 1) = 0{,}125$.)

$$\textbf{2.5.}\ F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ \frac{1}{10}(x^3 + x) & \text{при } 0 \le x \le 2, \; a = 0,\ b = 1. \\ 1 & \text{при } x > 2; \end{cases}$$

(*Ответ:* $M(X) = 1{,}4$, $D(X) = 0{,}227$, $P(0 \le X \le 1) = 0{,}2$.)

2.6. $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ \frac{1}{68}(x^3 + x) & \text{при } 0 \le x \le 4, \\ 1 & \text{при } x > 4; \end{cases}$ $a = 0$, $b = 3$.

(*Ответ:* $M(X) = 2{,}94$, $D(X) = 0{,}08$, $P(0 \le X \le 3) = 0{,}44$.)

2.7. $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 3\pi/4, \\ \cos 2x & \text{при } 3\pi/4 \le x \le \pi, \\ 1 & \text{при } x > \pi; \end{cases}$ $a = 3\pi/4$, $b = 5\pi/6$.

(*Ответ:* $M(X) = 3{,}64$, $D(X) = 1{,}54$, $P(3\pi/4 \le X \le 5\pi/6) =$
$= 0{,}5$.)

2.8. $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ 1 - \cos x & \text{при } 0 \le x \le \pi/2, \\ 1 & \text{при } x > \pi/2; \end{cases}$ $a = 0$, $b = \pi/3$.

(*Ответ:* $M(X) = 1$, $D(X) = 0{,}14$, $P(0 \le X \le \pi/3) = 0{,}5$.)

2.9. $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ \frac{1}{96}(x^3 + 8x) & \text{при } 0 \le x \le 4, \\ 1 & \text{при } x > 4; \end{cases}$ $a = 0$, $b = 2$.

(*Ответ:* $M(X) = 2{,}667$, $D(X) = 1{,}067$, $P(0 \le X \le 2) = 0{,}25$.)

2.10. $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < -1, \\ \frac{1}{9}(x + 1)^2 & \text{при } -1 \le x \le 2, \\ 1 & \text{при } x > 2; \end{cases}$ $a = 1$, $b = 2$.

(*Ответ:* $M(X) = 1$, $D(X) = 0{,}5$, $P(1 \le X \le 2) = 0{,}556$.)

2.11. $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < \pi/2, \\ 1 - \sin x & \text{при } \pi/2 \le x \le \pi, \\ 1 & \text{при } x > \pi; \end{cases}$ $a = \pi/2$, $b = 3\pi/4$.

(*Ответ:* $M(X) = 2{,}57$, $D(X) = 0{,}14$, $P(\pi/2 \le X \le 3\pi/4) =$
$= 0{,}29$.)

$$\textbf{2.12.}\ F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < -1, \\ \frac{1}{9}(x^3 + 1) & \text{при } -1 \le x \le 2, \\ 1 & \text{при } x > 2; \end{cases} \quad a = 1,\ b = 2.$$

(*Ответ:* $M(X) = 1{,}25$, $D(X) = 0{,}6375$, $P(1 \le X \le 2) = 0{,}778$.)

$$\textbf{2.13.}\ F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ \frac{1}{33}(3x^2 + 2x) & \text{при } 0 \le x \le 3, \\ 1 & \text{при } x > 3; \end{cases} \quad a = 0,\ b = 2.$$

(*Ответ:* $M(X) = 1{,}909$, $D(X) = 0{,}583$, $P(0 \le X \le 2) = 0{,}485$.)

$$\textbf{2.14.}\ F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 3\pi/2, \\ \cos x & \text{при } 3\pi/2 \le x \le 2\pi, \\ 1 & \text{при } x > 2\pi; \end{cases} \quad a = 3\pi/2,\ b = 7\pi/4.$$

(*Ответ:* $M(X) = 5{,}28$, $D(X) = 0{,}14$, $P(3\pi/2 \le X \le 7\pi/4) = 0{,}707$.)

$$\textbf{2.15.}\ F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ \frac{1}{15}(x^2 + 2x) & \text{при } 0 \le x \le 3, \\ 1 & \text{при } x > 3; \end{cases} \quad a = 0,\ b = 2.$$

(*Ответ:* $M(X) = 1{,}8$, $D(X) = 0{,}66$, $P(0 \le X \le 2) = 0{,}533$.)

$$\textbf{2.16.}\ F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < -1, \\ \frac{1}{5}(x + 1) & \text{при } -1 \le x \le 4, \\ 1 & \text{при } x > 4; \end{cases} \quad a = 0,\ b = 3.$$

(*Ответ:* $M(X) = 1{,}5$, $D(X) = 2{,}083$, $P(0 \le X \le 3) = 0{,}6$.)

$$\textbf{2.17.}\ F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ \sin x & \text{при } 0 \le x \le \pi/2, \\ 1 & \text{при } x > \pi/2; \end{cases} \quad a = 0,\ b = \pi/6.$$

(*Ответ:* $M(X) = 0{,}57$, $D(X) = 0{,}14$, $P(0 \le X \le \pi/6) = 0{,}5$.)

$$2.18.\ F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ (x^3 + 3x)/14 & \text{при } 0 \le x \le 2,\ a = 0,\ b = 1. \\ 1 & \text{при } x > 2; \end{cases}$$

(*Ответ:* $M(X) = 1{,}286$, $D(X) = 0{,}29$, $P(0 \le X \le 1) = 0{,}286$.)

$$2.19.\ F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 1, \\ (x^2 - x)/2 & \text{при } 1 \le x \le 2,\ a = 1{,}5,\ b = 2. \\ 1 & \text{при } x > 2; \end{cases}$$

(*Ответ:* $M(X) = 1{,}58$, $D(X) = 0{,}08$, $P(1{,}5 \le X \le 2) =$ $= 0{,}625$.)

$$2.20.\ F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ (x^2 + x)/6 & \text{при } 0 \le x \le 2,\ a = 0,\ b = 1. \\ 1 & \text{при } x > 2; \end{cases}$$

(*Ответ:* $M(X) = 1{,}222$, $D(X) = 0{,}284$, $P(0 \le X \le 1) =$ $= 0{,}333$.)

$$2.21.\ F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ \frac{1}{10}(x^2 + 3x) & \text{при } 0 \le x \le 2,\ a = 0,\ b = 1. \\ 1 & \text{при } x > 2; \end{cases}$$

(*Ответ:* $M(X) = 1{,}133$, $D(X) = 0{,}315$, $P(0 \le X \le 1) = 0{,}4$.)

$$2.22.\ F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 2, \\ \frac{1}{3}(x^2 - 2x) & \text{при } 2 \le x \le 3,\ a = 2{,}2,\ b = 2{,}5. \\ 1 & \text{при } x > 3; \end{cases}$$

(*Ответ:* $M(X) = 2{,}56$, $D(X) = 0{,}06$, $P(1{,}2 \le X \le 1{,}5) =$ $= 0{,}27$.)

$$2.23.\ F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 2, \\ \frac{1}{2}x - 1 & \text{при } 2 \le x \le 4,\ a = 1,\ b = 3. \\ 1 & \text{при } x > 4; \end{cases}$$

(*Ответ:* $M(X) = 3$, $D(X) = 0{,}333$, $P(1 \le X \le 3) = 1$.)

2.24. $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ \frac{1}{6}x & \text{при } 0 \le x \le 6, \\ 1 & \text{при } x > 6; \end{cases}$ $a = 2$, $b = 5$.

(*Ответ:* $M(X) = 3$, $D(X) = 3$, $P(2 \le X \le 5) = 0{,}5$.)

2.25. $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < -1, \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} & \text{при } -1 \le x \le 1, \\ 1 & \text{при } x > 1; \end{cases}$ $a = -1/2$, $b = 1/2$.

(*Ответ:* $M(X) = 0$, $D(X) = 0{,}333$, $P(-1/2 \le X \le 1/2) = 0{,}5$.)

2.26. $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 2, \\ (x-2)^2 & \text{при } 2 \le x \le 3, \\ 1 & \text{при } x > 3; \end{cases}$ $a = 2{,}5$, $b = 2{,}8$.

(*Ответ:* $M(X) = 2{,}667$, $D(X) = 0{,}056$, $P(2{,}5 \le X \le 2{,}8) = 0{,}39$.)

2.27. $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 1, \\ \frac{1}{2}(x^2 - x) & \text{при } 1 \le x \le 2, \\ 1 & \text{при } x > 2; \end{cases}$ $a = 1{,}5$, $b = 1{,}9$.

(*Ответ:* $M(X) = 1{,}589$, $D(X) = 0{,}076$, $P(1{,}5 \le X \le 1{,}9) = 0{,}48$.)

2.28. $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < \pi/2, \\ -\cos x & \text{при } \pi/2 \le x \le \pi, \\ 1 & \text{при } x > \pi; \end{cases}$ $a = \pi/2$, $b = 5\pi/6$.

(*Ответ:* $M(X) = 2{,}14$, $D(X) = 0{,}14$, $P(\pi/2 \le X \le 5\pi/6) = 0{,}87$.)

$$\textbf{2.29. } F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 1, \\ \frac{1}{4}(x-1) & \text{при } 1 \le x \le 5, \ a = 2,\ b = 4. \\ 1 & \text{при } x > 5; \end{cases}$$

(*Ответ:* $M(X) = 3$, $D(X) = 1{,}333$, $P(2 \le X \le 4) = 0{,}5$.)

$$\textbf{2.30. } F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ \frac{1}{2}(1 - \cos x) & \text{при } 0 \le x \le \pi, \ a = \pi/3,\ b = \pi/2. \\ 1 & \text{при } x > \pi; \end{cases}$$

(*Ответ:* $M(X) = 1{,}57$, $D(X) = 0{,}465$, $P(\pi/3 \le X \le \pi/2) =$ $= 0{,}25$.)

3

3.1. Валик, изготовленый автоматом, считается стандартным, если отклонение его диаметра от проектного размера не превышает 2 мм. Случайные отклонения диаметров валиков подчиняются нормальному закону со средним квадратичным отклонением 1,6 мм и математическим ожиданием, равным 0. Сколько стандартных валиков (в процентах) изготавливает автомат? (*Ответ:* 78,9 %.)

3.2. При определении расстояния радиолокатором случайные ошибки распределяются по нормальному закону. Какова вероятность того, что ошибка при определении расстояния не превысит 20 м, если известно, что систематических ошибок радиолокатор не допускает, а дисперсия ошибок равна 1370 м^2? (*Ответ:* 0,4108.)

3.3. Все значения равномерно распределенной СВ X лежат на отрезке [2; 8]. Найти вероятность попадания СВ X в промежуток (3; 5). (*Ответ:* 0,3333.)

3.4. СВ X подчинена закону Пуассона с математическим ожиданием, равным 3. Найти вероятность того, что СВ X примет значение, меньшее, чем ее математическое ожидание. (*Ответ:* 0,423.)

3.5. Цена деления шкалы измерительного прибора равна 0,2. Показания прибора округляются до ближайшего целого деления. Считая, что ошибки измерения распределены равномерно, найти вероятность того, что при отсчете будет сделана ошибка, меньшая 0,04. (*Ответ:* 0,4.)

3.6. Поток заявок, поступающих на телефонную станцию, представляет собой простейший пуассоновский поток. Математическое ожидание числа вызовов за 1 ч равно 30. Найти вероятность того, что за 1 мин поступит не менее двух вызовов. (*Ответ:* 0,0902.)

3.7. В лотерее разыгрываются мотоцикл, велосипед и одни часы. Найти математическое ожидание выигрыша для лица, имеющего один билет, если общее количество билетов равно 100. (*Ответ:* 3,4.)

3.8. Считается, что изделие – высшего качества, если отклонение его размеров от номинальных не превосходит по абсолютной величине 3,6 мм. Случайные отклонения размера изделия от номинального подчиняются нормальному закону со средним квадратичным отклонением, равным 3 мм. Систематические отклонения отсутствуют. Определить среднее число изделий высшего качества среди 100 изготовленных. (*Ответ:* 77.)

3.9. Детали, выпускаемые цехом, имеют диаметры, распределенные по нормальному закону с математическим ожиданием, равным 5 см, и дисперсией, равной 0,81 см^2. Найти вероятность того, что диаметр наугад взятой детали – от 4 до 7 см. (*Ответ:* 0,8533.)

3.10. СВ X подчинена нормальному закону с математическим ожиданием, равным 0. Вероятность попадания этой СВ в интервал $(-1; 1)$ равна 0,5. Найти среднее квадратичное отклонение и записать нормальный закон. (*Ответ:* 1,47.)

3.11. Автобусы некоторого маршрута идут строго по расписанию. Интервал движения – 5 мин. Найти вероятность того, что пассажир, подошедший к остановке, будет ожидать очередной автобус менее 3 мин. (*Ответ:* 0,6.)

3.12. Ребро куба x измерено приближенно: $1 \le x \le 2$. Рассматривая ребро куба как СВ X, распределенную равномерно в интервале $(1; 2)$, найти математическое ожидание и дисперсию объема куба. (*Ответ:* $M(X) = 3{,}75$, $D(X) = 4{,}08$.)

3.13. Случайная величина подчинена закону Пуассона с математическим ожиданием $a = 3$. Найти вероятность того, что данная СВ примет положительное значение. (*Ответ:* 0,95.)

3.14. При работе ЭВМ время от времени возникают сбои. Поток сбоев можно считать простейшим. Среднее число сбоев за сутки равно 1,5. Найти вероятность того, что в течение суток произойдет хотя бы один сбой. (*Ответ:* 0,777.)

3.15. Из пункта C ведется стрельба из орудия вдоль прямой CK. Предполагается, что дальность полета распределена нормально с математическим ожиданием 1000 м и средним квадратичным отклонением 5 м. Определить (в процентах), сколько снарядов упадет с перелетом от 5 до 70 м. (*Ответ:* 66 %.)

3.16. СВ X распределена нормально с математическим ожиданием 40 и дисперсией 100. Вычислить вероятность попадания СВ X в интервал (30; 80). (*Ответ:* 0,8413.)

3.17. Трамваи данного маршрута идут с интервалом в 5 мин. Пассажир подходит к трамвайной остановке в некоторый момент времени. Какова вероятность появления пассажира не ранее чем через 1 мин после ухода предыдущего трамвая, но не позднее чем за 2 мин до отхода следующего трамвая? (*Ответ:* 0,4.)

3.18. Минутная стрелка часов перемещается скачком в конце каждой минуты. Найти вероятность того, что в данное мгновение часы покажут время, которое отличается от истинного не более чем на 20 с. (*Ответ:* 0,6667.)

3.19. При заданном положении точки разрыва снаряда цель оказывается накрытой пуассоновским полем осколков с плотностью $\lambda = 2{,}5$ осколков/м^2. Площадь проекции цели на плоскость, на которой наблюдается осколочное поле, равна 0,8 м^2. Каждый осколок, попавший в цель, поражает ее с полной достоверностью. Найти вероятность того, что цель будет поражена. (*Ответ:* 0,865.)

3.20. Число атак истребителей, которым может подвергнуться бомбардировщик над территорией противника, есть случайная величина, распределенная по закону Пуассона с математическим ожиданием $a = 3$. Каждая атака с вероятностью 0,4 заканчивается поражением бомбардировщика. Определить вероятность поражения бомбардировщика в результате трех атак. (*Ответ:* 0,784.)

3.21. Производят взвешивание вещества без систематических ошибок. Случайная ошибка взвешивания распределена нормально с математическим ожиданием 20 кг и средним квадратичным отклонением 2 кг. Найти вероятность того, что следующее взвешивание отличается от математического ожидания не более чем на 100 г. (*Ответ:* 0,0398.)

3.22. Диаметр подшипников, изготовленных на заводе, представляет собой случайную величину, распределенную нормально с математическим ожиданием 1,5 см и средним квадратичным отклонением 0,04 см. Найти вероятность того, что размер наугад взятого подшипника колеблется от 1 до 2 см. (*Ответ:* 1.)

3.23. Цена деления шкалы амперметра равна 0,1 А. Показания округляют до ближайшего целого деления. Найти вероятность того, что при отсчете будет сделана ошибка, превышающая 0,04 А. (*Ответ:* 0,6.)

3.24. Найти дисперсию и среднее квадратичное отклонение СВ X, распределенной равномерно в интервале (2; 10). (*Ответ:* $D(X) = 5{,}33$, $\sigma(X) = 2{,}31$.)

3.25. Радиостанция ведет передачу информации в течение 10 мкс. Работа ее происходит при наличии хаотической импульсной помехи, среднее число импульсов которой в секунду составляет 10^4. Для срыва передачи достаточно попадания одного импульса помехи в период работы станции. Считая, что число импульсов помехи, попадающих в данный интервал времени, распределено по закону Пуассона, найти вероятность срыва передачи информации. (*Ответ:* 0,09516.)

3.26. Найти математическое ожидание и дисперсию: а) числа очков, выпавших при одном бросании игральной кости; б) суммы очков, выпавших при бросании двух игральных костей. (*Ответ:* а) $M(X) = 3{,}5$, $D(X) = 2{,}9167$; б) $M(X) = 7$, $D(X) = 5{,}83$.)

3.27. Считается, что отклонение длины изготавливаемых деталей от стандартных является случайной величиной, распределенной по нормальному закону. Зная, что длина стандартной детали 40 см, а среднее квадратичное отклонение 0,4 см, определить, какую точность длины изделия можно гарантировать с вероятностью 0,8. (*Ответ:* 0,512 см.)

3.28. Рост мужчины является случайной величиной, распределенной по нормальному закону с математическим ожиданием, равным 170 см, и дисперсией, равной 49 см^2. Найти вероятность того, что трое наугад выбранных мужчин будут иметь рост от 170 до 175 см. (*Ответ:* 0,2611.)

3.29. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение СВ X, распределенной равномерно в интервале (8; 14). (*Ответ:* $M(X) = 11$, $D(X) = 3$, $\sigma(X) = \sqrt{3}$.)

3.30. Среди семян риса 0,4 % семян сорняков. Число сорняков в рисе распределено по закону Пуассона. Найти вероятность того, что при случайном отборе 5000 семян будет обнаружено 5 семян сорняков. (*Ответ:* 0,000055.)

4

4.1. Для определения качества производимой заводом продукции отобрано наугад 2500 изделий. Среди них оказалось 50 с дефектами. Частота изготовления бракованных изделий принята за приближенное значение вероятности изготовления бракованного изделия. Определить, с какой вероятностью можно гарантировать, что допущенная при этом абсолютная погрешность не будет превышать 0,02. (*Ответ:* не менее 0,98.)

4.2. Дисперсия каждой из 4500 независимых и одинаково распределенных случайных величин равна 5. Найти вероятность того, что среднее арифметическое этих случайных величин отклонится от своего математического ожидания не более чем на 0,04. (*Ответ:* 0,7659.)

4.3. Случайная величина X является средней арифметической 3200 независимых и одинаково распределенных случайных величин с математическим ожиданием, равным 3, и дисперсией, равной 2. Найти вероятность того, что СВ X примет значение из промежутка (2,95; 3,075). (*Ответ:* 0,9759.)

4.4. В разультате медицинского осмотра 900 призывников установлено, что их средняя масса на 1,2 кг больше средней массы призывников за один из предшествующих периодов. Какова вероятность этого отклонения, если среднее квадратичное отклонение массы призывников равно 8 кг? (*Ответ:* 0,000003.)

4.5. СВ X является средним арифметическим независимых и одинаково распределенных случайных величин, дисперсия каждой из которых равна 5. Сколько нужно взять таких величин, чтобы СВ X с вероятностью, не меньшей 0,9973, отклонялась от своего математического ожидания не более чем на 0,01? (*Ответ:* 450 000.)

4.6. СВ X является средним арифметическим 10 000 независимых одинаково распределенных случайных величин, среднее квадратичное отклонение каждой из которых равно 2. Какое максимальное отклонение СВ X от ее математического ожидания можно ожидать с вероятностью, не меньшей 0,9544? (*Ответ:* 0,04.)

4.7. Производится выборочный контроль партии электролампочек для определения средней продолжительности их горения. Каким должен быть объем выборки, чтобы с вероятностью, не меньшей 0,9876, можно было утверждать, что средняя продолжительность эксплуатации лампочки по всей партии отклонилась от средней, полученной в выборке, не более чем на 10 ч, если среднее квадратичное отклонение продолжительности эксплуатации лампочки равно 80 ч? (*Ответ:* 4000.)

4.8. Вероятность того, что наугад выбранная деталь окажется бракованной, при каждой проверке одна и та же и равна 0,1. Партия изделий не принимается при обнаружении не менее 10 бракованных изделий. Сколько надо проверить деталей, чтобы с вероятностью 0,6 можно было утверждать, что партия, имеющая 10 % брака, не будет принята? (*Ответ:* 108.)

4.9. Сколько надо произвести опытов, чтобы с вероятностью 0,9 утверждать, что частота интересующего нас события будет отличаться от вероятности появления этого события, равной 0,4, не более чем на 0,1? (*Ответ:* 65.)

4.10. Вероятность появления некоторого события в одном опыте равна 0,6. Какова вероятность того, что это событие появится в большинстве из 60 опытов? (*Ответ:* 0,966.)

4.11. Вероятность появления события в одном опыте равна 0,5. Можно ли с вероятностью, большей 0,97, утверждать, что число появлений события в 1000 независимых опытах находится в пределах от 400 до 600? (*Ответ:* 0,975.)

4.12. Вероятность положительного исхода отдельного испытания равна 0,8. Оценить вероятность того, что при 100 независимых повторных испытаниях отклонение частоты положительных исходов от вероятности при отдельном испытании по своей абсолютной величине будет меньше 0,05. (*Ответ:* более 0,936.)

4.13. Вероятность наличия зазубрин на металлических брусках, изготовленных для обточки, равна 0,2. Оценить вероятность того, что в партии из 1000 брусков отклонение числа пригодных брусков от 800 не превышает 5 %. (*Ответ:* более 0,936.)

4.14. По данным ОТК, брак при выпуске деталей составляет 2,5 %. Пользуясь теоремой Бернулли, оценить вероятность того, что при просмотре партии из 8000 деталей будет установлено отклонение от средней доли брака менее 0,005. (*Ответ:* более 0,878125.)

4.15. Вероятность появления события в отдельном испытании равна 0,6. Применив теорему Бернулли, определить число независимых испытаний, начиная с которого вероятность отклонения частоты события от его вероятности по абсолютной величине меньшего 0,1, больше 0,97. (*Ответ:* 801.)

4.16. Суточный расход воды в населенном пункте является случайной величиной, среднее квадратичное отклонение которой равно 10 000 л. Оценить вероятность того, что расход воды в этом пункте в течение дня отклоняется от математического ожидания по абсолютной величине более чем на 25 000 л. (*Ответ:* не более 0,16.)

4.17. Математическое ожидание количества выпадающих в течение года в данной местности осадков составляет 60 см. Определить вероятность того, что в этой местности осадков выпадет не менее 180 см. (*Ответ:* не более 0,3333.)

4.18. В результате 200 независимых опытов найдены значения СВ X_1, X_2, ..., X_{200}, причем $M(X) = D(X) = 2$. Оценить сверху вероятности того, что абсолютная величина разности между средним арифметическим значений случайной величины $\frac{1}{200}\sum_{n=1}^{200} X_i$ и математическим ожиданием меньше 0,2. (*Ответ:* 0,75.)

4.19. Дисперсия каждой из 2500 независимых СВ не превышает 5. Оценить вероятность того, что отклонение среднего арифметического этих случайных величин от среднего арифметического их математических ожиданий не превысит 0,4. (*Ответ:* не менее 0,9875.)

4.20. Для определения средней урожайности поля в 10 000 га предполагается взять на выборку по одному квадратному метру с каждого гектара площади и точно подсчитать урожайность с этих квадратных метров. Оценить вероятность того, что средняя выборочная урожайность будет отличаться от истинной средней урожайности на всем массиве не более чем на 0,1 ц, если предположить, что среднее квадратичное отклонение урожайности не превышает 3 ц? (*Ответ:* не менее 0,91.)

4.21. Число телевизоров с плоским экраном составляет в среднем 40 % общего их выпуска. Пользуясь неравенством Чебышева, оценить вероятность того, что в партии из 500 телевизоров доля телевизоров с плоским экраном отклоняется от средней не более чем на 0,06. (*Ответ:* не менее 0,8667.)

4.22. Принимая вероятность вызревания кукурузного стебля с тремя початками равной 0,75, оценить с помощью неравенства Чебышева вероятность того, что среди 3000 стеблей опытного участка таких стеблей будет от 2190 до 2310 включительно. (*Ответ:* 0,84375.)

4.23. Для определения средней урожайности на участке площадью в 1800 га взято на выборку по 1 м^2 с каждого гектара. Известно, что дисперсия урожайности по всему участку не превышает 4,5. Оценить вероятность того, что средняя выборочная урожайность будет отличаться от средней урожайности по всему участку не более чем на 0,25 ц. (*Ответ:* более 0,96.)

4.24. Среднее значение скорости ветра у земли в данном пункте равно 16 км/ч. Оценить вероятность того, что в этом пункте скорость ветра не будет превышать 80 км/ч. (*Ответ:* не менее 0,8.)

4.25. Среднее значение расхода воды в населенном пункте составляет 50 000 л/дн. Оценить вероятность того, что в этом населенном пункте расход воды не будет превышать 150 000 л/дн. (*Ответ:* не менее 0,667.)

4.26. Математическое ожидание количества выпадающих в течение года в данной местности осадков составляет 55 см. Оценить вероятность того, что в этой местности осадков выпадет более 175 см. (*Ответ:* не более 0,314.)

4.27. Число солнечных дней в году для данной местности является случайной величиной, математическое ожидание которой равно 75 дням. Оценить вероятность того, что в течение года в этой местности будет более 200 солнечных дней. (*Ответ:* не более 0,75.)

4.28. Математическое ожидание отклонения от центра мишени при стрельбе по ней составляет 6 см. Оценить вероятность того, что при стрельбе по круговой мишени радиусом 15 см произойдет попадание в мишень. (*Ответ:* не менее 0,6.)

4.29. Среднее квадратичное отклонение ошибки измерения азимута равно $0{,}5°$, а ее математическое ожидание – нулю. Оценить вероятность того, что ошибка среднего арифметического трех независимых измерений не превзойдет $1°$. (*Ответ:* не менее 0,917.)

4.30. Среднее квадратичное отклонение каждой из 2134 независимых СВ не превосходит 4. Оценить вероятность того, что отклонение среднего арифметического этих СВ от среднего арифметического их математических ожиданий не превзойдет 0,5. (*Ответ:* не менее 0,97.)

Решение типового варианта

1. При измерении окружности груди у 25 спортсменов установлено, что у троих этот объем равен 88 см, у четверых – 92, у пятерых – 96, у шестерых – 98 и у семи – 100 см. СВ X – окружность груди спортсмена. Записать закон распределения СВ X. Вычислить математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и среднее квадратичное отклонение σ_x. Найти интегральную функцию распределения $F(x)$ и построить ее график.

▶ Вероятность обнаружения среди 25 спортсменов троих с окружностью груди, равной 88 см, $p_1 = 3/25 = 0{,}12$. Аналогично вероятность обнаружения среди 25 спортсменов четверых с окружностью груди 92 см $p_2 = 4/25 = 0{,}16$ и т.д. Получаем закон распределения в виде следующей таблицы:

X	88	92	96	98	100
p	0,12	0,16	0,20	0,24	0,28

Далее находим:

$$M(X) = 88 \cdot 0{,}12 + 92 \cdot 0{,}16 + 96 \cdot 0{,}20 + 98 \cdot 0{,}24 + 100 \cdot 0{,}28 = 96,$$

$$M(X^2) = 88^2 \cdot 0{,}12 + 92^2 \cdot 0{,}16 + 96^2 \cdot 0{,}20 + 98^2 \cdot 0{,}24 + 100^2 \cdot 0{,}28 = 9231{,}68,$$

$$D(X) = M(X^2) - (M(X^2))^2 = 9231{,}68 - 96^2 = 15{,}68,$$

$$\sigma_x = \sqrt{D(X)} = 3{,}96;$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 88, \\ 0{,}12 & \text{при } 88 < x \le 92, \\ 0{,}28 & \text{при } 92 < x \le 96, \\ 0{,}48 & \text{при } 96 < x \le 98, \\ 0{,}72 & \text{при } 98 < x \le 100, \\ 1 & \text{при } 100 < x. \end{cases}$$

График функции $F(x)$ приведен на рис. 18.18. ◀

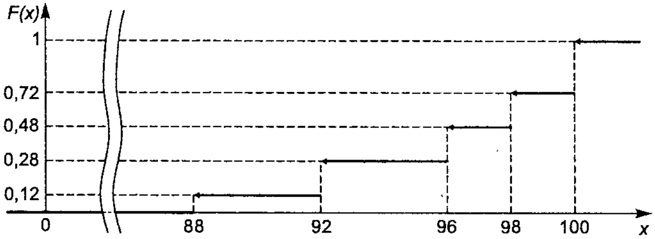


Рис. 18.18

2. Дана функция распределения СВ X

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ x^2/4 & \text{при } 0 \le x \le 2, \\ 1 & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

Найти плотность распределения вероятностей $f(x)$, математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$ и вероятность попадания СВ X на отрезок [0,5; 1,5]. Построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$.

▶ Так как $0 \le x \le 2$ и $f(x) = F'(x)$, то

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ x/2 & \text{при } 0 \le x \le 2, \\ 1 & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

Далее вычисляем:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \frac{1}{2}\int_0^2 x^2 dx = \frac{1}{2}\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^2 = \frac{4}{3},$$

$$M(X^2) = \frac{1}{2}\int_0^2 x^3 dx = \frac{1}{2}\frac{x^4}{4}\Bigg|_0^2 = 2,$$

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2 = 2 - 16/9 = 2/9,$$

$$P(0,5 \le X \le 1,5) = F(1,5) - F(0,5) = (1,5)^2/4 -$$
$$-(0,5)^2/4 = 0,5.$$

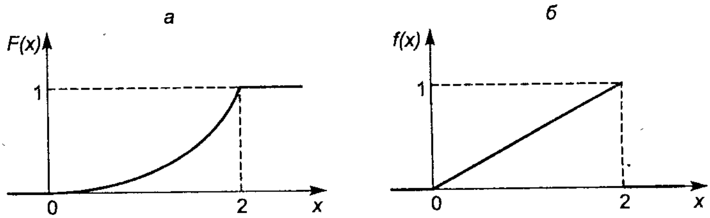


Рис. 18.19

Графики функций $F(x)$ и $f(x)$ приведены на рис. 18.19, *а*, *б*. ◄

3. Случайная величина X распределена нормально с математическим ожиданием, равным 12,5. Вероятность попадания СВ X в интервал (10; 15) равна 0,2. Чему равна вероятность попадания СВ X в интервал (35; 40)?

► Согласно формуле (18.18) и прил. 4 находим:

$$P(10 \le X \le 15) = \Phi\left(\frac{15-12{,}5}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{10-12{,}5}{\sigma}\right) = 0{,}2\,,$$

$$\Phi\left(\frac{2{,}5}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{2{,}5}{\sigma}\right) = 0{,}2\,,\ 2\Phi\left(\frac{2{,}5}{\sigma}\right) = 0{,}2\,,\ \Phi\left(\frac{2{,}5}{\sigma}\right) = 0{,}1\,,$$

откуда $2{,}5/\sigma = 0{,}25$, $\sigma = 2{,}5/0{,}25 = 10$.

Далее вычисляем:

$$P(35 < X < 40) = \Phi\left(\frac{40-12{,}5}{10}\right) - \Phi\left(\frac{35-12{,}5}{10}\right) =$$

$$= \Phi(2{,}75) - \Phi(2{,}25) = 0{,}4970 - 0{,}4878 = 0{,}0092\,. ◄$$

4. Вероятность некоторого события в каждом испытании из серии 9000 независимых испытаний равна 1/3. Используя неравенство Чебышева, оценить вероятность того, что частота этого события отклонится от его вероятности по абсолютной величине не более чем на 0,01. Сравнить полученную оценку с результатом применения интегральной теоремы Муавра – Лапласа.

► Неравенство Чебышева для СВ X имеет вид

$$P(|X - M(X)| < \varepsilon) \ge 1 - D(X)/\varepsilon^2\,.$$

Для данной задачи неравенство Чебышева записывается в виде

$$P(|m/n-p|<0{,}01) = P(|m-np|\le 90) \ge 1-D(X)/90^2,$$

где $X = m$; $p = 1/3$; $n = 9000$; $M(X) = np = 9000\cdot\frac{1}{3} =$ $= 3000$; $D(X) = npq = 9000\cdot\frac{1}{3}\frac{2}{3} = 2000$. Тогда

$$P(|m/n-p|<0{,}01) \ge 1-2000/90^2 = 1-20/81 = $$
$$= 61/81 \approx 0{,}7531.$$

Далее находим:

$$P(|m/n-p|<\varepsilon) = P(p-\varepsilon \le m/n \le p+\varepsilon) =$$
$$= P(np-n\varepsilon \le m \le np+n\varepsilon) = P(m_1 \le m \le m_2).$$

Здесь приняты следующие обозначения: $m_1 = np-n\varepsilon$, $m_2 =$ $= np+n\varepsilon$. Согласно интегральной формуле Муавра – Лапласа $P(m_1 \le m \le m_2) = \Phi(x_2)-\Phi(x_1)$, где

$$x_1 = \frac{m_1-np}{\sqrt{npq}} = \frac{np-n\varepsilon-np}{\sqrt{npq}} = -\frac{9000\cdot 0{,}01}{\sqrt{2000}} =$$
$$= -\frac{9}{\sqrt{20}} \approx -2{,}01.$$

Аналогично $x_2 = 2{,}01$. Тогда

$$P(|m/n-p|\le 0{,}01) = P(m_1 \le m \le m_2) =$$
$$= P(2910 \le m \le 3090) = \Phi(2{,}01)-\Phi(-2{,}01) =$$
$$= -2\Phi(2{,}01) = 0{,}9545.$$

Таким образом, согласно неравенству Чебышева, имеем оценку $P(|m/n-1/3|<0{,}01) \ge 0{,}7531$, а по интегральной теореме Муавра – Лапласа $P(|m/n-1/3|<0{,}01) \approx 0{,}9545$. ◄

18.10. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ К ГЛ. 18

1. В круг радиусом R вписан правильный треугольник. Внутрь круга наугад брошены 4 точки. Найти вероятности следующих событий: а) все 4 точки попадут внутрь треугольника; б) одна точка попадет внутрь треугольника и по одной точке – на каждый сегмент. (Предполагается, что вероятность попадания точки внутрь любой фигуры пропорциональна ее площади и не зависит от расстояния от точки до фигуры.) (*Ответ:* а) $\left(\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}\right)^4$; б) $4!\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}\left(\frac{4-3\sqrt{3}}{12\pi}\right)^3$.)

2. В первой урне содержится 10 шаров, 8 из них – белые, во второй – 20 шаров, 4 из них – белые. Из каждой урны наугад извлекли по одному шару, а затем из этих двух шаров наугад взяли один шар. Найти вероятность того, что взятый шар – белый. (*Ответ:* 0,5.)

3. Два из четырех независимо работающих элементов автоматического устройства отказали. Найти вероятность того, что отказали первый и второй элементы, если вероятности отказа каждого элемента равны соответственно $p_1 = 0,1$, $p_2 = 0,2$, $p_3 = 0,3$, $p_4 = 0,4$. (*Ответ:* 0,039.)

4. ОТК проверяет на стандартность 900 деталей. Вероятность того, что каждая проверяемая деталь – стандартная, равна 0,9. Найти с вероятностью 0,95 границы, в которых будет заключено число m стандартных деталей среди проверяемых. (*Ответ:* $792 \le m \le 828$.)

5. Электрическая цепь составлена по схеме, приведенной на рис. 18.20. Вероятности выхода из строя каждого из ее эле-

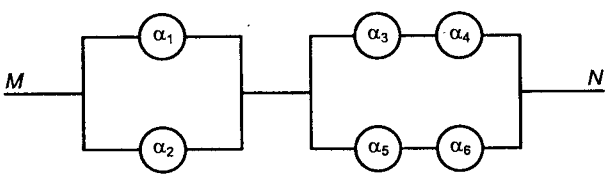


Рис. 18.20

ментов $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_6$ в данный промежуток времени равны соответственно $p_1 = 0,2$, $p_2 = 0,4$, $p_3 = 0,1$, $p_4 = 0,3$, $p_5 = 0,6$, $p_6 = 0,5$. Найти вероятность работы цепи в данный промежуток времени. (*Ответ:* 0,64768.)

6. Прибор выйдет из строя, если перегорит не менее пяти ламп первого типа или не менее двух ламп второго типа. Определить вероятность выхода из строя прибора, если известно, что перегорело 5 ламп. Вероятность того, что перегорит лампа первого типа, равна 0,7, а второго типа – 0,3. (*Ответ:* 0,64.)

7. Завод выпускает 96 % изделий первого сорта и 4 % изделий второго сорта. Наугад выбирается 1000 изделий; СВ X означает число изделий первого сорта среди отобранных. Записать закон распределения СВ X и вычислить ее математическое ожидание и дисперсию. (*Ответ:* $M(X) = 960$, $D(X) = 38{,}4$.)

8. Математическое ожидание числа отказов радиоаппаратуры за 1000 ч равно 5. Определить вероятность отказа радиоаппаратуры за 20 ч работы. (*Ответ:* 0,095.)

9. Бросают n игральных костей. Найти математическое ожидание суммы выпавших очков. (*Ответ:* $7n/2$.)

10. Доказать, что математическое ожидание дискретной СВ заключено между наименьшим и наибольшим ее возможными значениями.

11. Доказать, что если X и Y – независимые СВ, то $D(XY) = D(X)D(Y) + m_y^2 D(X) + m_x^2 D(Y)$.

12. Дискретная СВ X распределена по закону Пуассона, т.е. она принимает значения 0, 1, 2, ..., n, ... с вероятностями $P(n) = \dfrac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}$ для всех $n = 0, 1, 2, \ldots$. Найти математическое ожидание и дисперсию СВ X. (*Ответ:* $M(X) = 1/\lambda$, $D(X) = 1/\lambda$.)

13. Плотность распределения вероятностей СВ X $f(x) = x^n e^{-x}/(n!)$ при $x \geq 0$ и $f(x) = 0$ при $x < 0$. Найти математическое ожидание и дисперсию СВ X. (*Ответ:* $M(X) = n+1$, $D(X) = n+1$.)

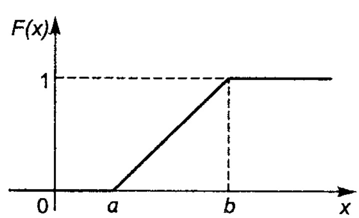


Рис. 18.21

14. Функция распределения СВ X задана графиком (рис. 18.21). Найти плотность распределения вероятностей, математическое ожидание и дисперсию СВ X. (*Ответ:* $M(X) = (b+a)/2$, $D(X) = (b-a)^2/12$.)

15. Независимые СВ X и Y распределены по нормальному закону с параметрами $m_x = 2$, $m_y = -3$, $\sigma_x = 1$, $\sigma_y = 2$. Вычислить вероятность того, что $y < X - 5$. (*Ответ:* 0,5.)

16. Непрерывная СВ X распределена в интервале (0; 1) с плотностью

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{при } x \in (0;\ 1), \\ 0 & \text{при } x \notin (0;\ 1). \end{cases}$$

Найти математическое ожидание и дисперсию СВ $Y = X^2$. (*Ответ:* $m_y = 0{,}5$, $D(Y) = 1/12$.)

17. В урне a белых и b красных шаров. Из нее извлекают k шаров. Найти математическое ожидание и дисперсию числа извлеченных белых шаров. (*Ответ:* $M(X) = \dfrac{ka}{a+b}$, $D(X) =$ $= \dfrac{kab}{(a+b)^2}\dfrac{a+b-k}{a+b-1}$.)

18. Задана плотность распределения вероятностей системы СВ (X, Y)

$$f(x, y) = \begin{cases} 4xye^{-x^2-y^2} & \text{при } x \geq 0,\ y \geq 0, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Найти математические ожидания и дисперсии составляющих X и Y. (*Ответ:* $m_x = m_y = \sqrt{\pi}/2$, $D(X) = D(Y) = 1 - \pi/4$.)

19. Вероятность того, что станок не откажет за 5 ч работы, равна 0,60653. Найти $M(X)$ и $D(X)$, если СВ X – время безотказной работы станка – имеет экспоненциальное распределение. (*Ответ:* $M(X) = 10$, $D(X) = 100$.)

20. Заявки, рассылаемые фирмой, удовлетворяются примерно в 30 % случаев независимо одна от другой. Фирма разослала 200 заявок. Вычислить: а) математическое ожидание и дисперсию удовлетворенных заявок X; б) $P(X = M(X))$. (*Ответ:* а) $M(X) = 60$, $D(X) = 42$; б) $P(\{X = 60) = P_{200}(60) \approx 0{,}06$.)

21. Станок-автомат изготавливает шарики. Контролируется их диаметр X, удовлетворительно описываемый гауссовским законом распределения со средним значением 10 мм. Каково среднее квадратичное отклонение диаметра шарика, если диаметр с вероятностью 0,99 заключен в интервале (9,7; 10,3)? (*Ответ:* 0,1168.)

22. Распределенная по закону Вейбулла СВ X имеет среднее значение 2, параметр масштаба $a = 1$, параметр сдвига $c = 0$. Вычислить параметр формы b, дисперсию и вероятность попадания СВ X в интервал (1; 2). (*Ответ:* $b = 0{,}5$; $D(X) = 20$; $P(1 < X < 2) = 0{,}1238$.)

23. Рост взрослого мужчины удовлетворительно описывается нормальным законом распределения. По статистике средний рост составляет 175 см, а среднее квадратичное отклонение равно 7 см. Найти вероятность того, что рост наугад взятого мужчины будет отличаться от среднего роста не более чем на 7 см. (*Ответ:* 0,6826.)

24. Три игральные кости подбросили 15 раз; СВ X – число подбрасываний, при которых ровно на двух костях появилось по одному очку. Определить закон распределения СВ X, ее математическое ожидание и среднее квадратичное отклонение. (*Ответ:* биномиальный с $n = 15$, $p = 5/72$; $m_x = 75/72 = 1{,}04$; $\sigma_x = 0{,}98$.)

25. У торгового агента имеется пять адресов потенциальных покупателей, к которым он обращается по списку с предложением приобрести реализуемый фирмой товар. Вероятность согласия покупателей оценивается как 0,5; 0,4; 0,4; 0,3 и 0,25. Покупатели принимают решение о приобретении товара независимо друг от друга. Агент обращается к ним в указанном порядке до тех пор, пока кто-нибудь из них не согласится приобрести товар. Составить ряд распределения СВ X – числа покупателей, к которым обратится агент. Найти математическое ожидание и дисперсию СВ X. (*Ответ:* $m_x = 2{,}106$; $\sigma_x^2 = 1{,}959$.)

19. ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

19.1. ВЫБОРКА. ЭМПИРИЧЕСКИЕ ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

При исследовании количественного или качественного признака СВ X из общего числа возможных его реализаций (*генеральной совокупности возможных значений*) извлекается случайным образом некоторое конечное число элементов (*реализаций признака* X). Эту совокупность элементов называют *случайной выборкой* или просто *выборкой*, а число n отобранных значений – *объемом выборки.*

Задача математической статистики заключается в исследовании свойств выборки и обобщении этих свойств на всю генеральную совокупность.

Результаты всякого эксперимента записывают в виде таблицы, в первой строке которой указывают номер эксперимента, а во второй – значение наблюдаемого признака X, равное x и называемое *вариантой признака* X. Такая таблица называется *статистическим рядом*. Статистический ряд, расположенный по возрастанию вариант, называется *вариационным*.

Если m_i – число наблюдений значения x_i признака X, $n = \sum\limits_{i=1}^{k} m_i$ – общее число наблюдений (объем выборки), то число m_i/n называется *относительной частотой наблюдения* x_i:

$$W(x_i) = m_i/n\,,\ i = \overline{1, k}\,.$$

Таблица, в которой даны значения вариант в возрастающем порядке, частот m_i или относительных частот $W(x_i)$, называется *статистическим рядом сгруппированных данных*. Таковой является, например, таблица вида

x_i	1	3	4	6	7
m_i	2	4	6	5	3
$W(x_i)$	2/20	4/20	6/20	5/20	3/20

Статистической (эмпирической) функцией распределения выборки называется функция $F^*(x)$, определяющая для всякого $x \in \mathbf{R}$ относительную частоту события $(X < x)$, т.е.

$$F^*(x) = \frac{n_x}{n} = \sum_{x_i < x} \frac{m_i}{n}\,,$$

где n_x – число вариант, меньших x; n – объем выборки.

Перечислим *основные свойства статистической функции распределения выборки* $F^*(x)$:

1) значения функции $F^*(x)$ принадлежат отрезку $[0; 1]$.

2) функция $F^*(x)$ является неубывающей;

3) $F^*(x) = 0$ при $x < x_1$ и $F^*(x) = 1$ при $x > x_k$, где x_1, x_k – соответственно наименьшее и наибольшее значения вариант.

Величина $\omega = x_k - x_1$ называется *размахом выборки.*

Пример 1. Построить эмпирическую функцию распределения по данным статистического ряда:

x_i	2	4	6	8
m_i	4	6	7	3

▸ Из определения статистической функции распределения следует:

$$F^*(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 2, \\ 1/5 & \text{при } 2 < x \le 4, \\ 1/2 & \text{при } 4 < x \le 6, \\ 17/20 & \text{при } 6 < x \le 8, \\ 1 & \text{при } x > 8. \end{cases}$$

График функции $F^*(x)$ изображен на рис. 19.1. ◂

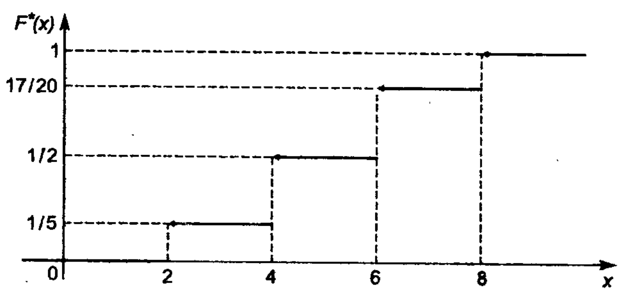


Рис. 19.1

При больших объемах выборки интервал изменения всех ее вариант разбивают на определенное число интервалов равной длины, которые называются *интервалами группировки.* Затем подсчитывают число вариант выборки, попавших в каждый из интервалов, вычисляют относительные частоты числа вариант в каждом интервале. Таблица, в которой дана система интервалов, указаны частоты или относительные частоты числа вариант в каждом интервале, называется *статистической совокупностью.*

Например, статистическая совокупность ошибок 100 измерений дальности с помощью некоторого прибора имеет следующий вид:

Интер-вал, м	(−20; −15)	(−15; −10)	(−10; −5)	(−5; 0)	(0; 5)	(5; 10)	(10; 15)	(15; 20)
m_i	2	8	17	24	26	13	6	4
W_i	0,02	0,08	0,17	0,24	0,26	0,13	0,06	0,04

Статистическую совокупность графически изображают с помощью *гистограммы*. Гистограмму строят следующим образом: по оси абсцисс откладывают интервалы, на каждом из них строят прямоугольники, площади которых равны частотам или относительным частотам попадания вариант в соответствующий интервал. Высоты этих прямоугольников равны m_i/h или $m_i/(nh)$, где h – длина выбранных интервалов. Гистограмма относительных частот является статистическим аналогом плотности распределения вероятностей генеральной совокупности.

Полигоном частот называют ломаную линию, состоящую из отрезков, соединяющих точки $(x_1;\ m_1)$, $(x_2;\ m_2)$, ..., $(x_k;\ m_k)$. *Полигон относительных частот* представляет собой ломаную, состоящую из отрезков, соединяющих точки $(x_i;\ m_i/n)$, $i = \overline{1,\ k}$.

Пример 2. Дана некоторая выборка:

14	16	20	15	18	12	13	10	17	15	12
17	11	17	13	11	17	16	12	16	13	16
12	19	18	9	7	18	15	11	11	14	13
10	16	15	17	21	13	17	16	13	15	15
18	14	16	14	10	14	8	15	16	16	14

Построить статистическую совокупность выборки с семью интервалами и гистограмму относительных частот.

▶ Размах выборки $\omega = 21 - 7 = 14$, поэтому длина каждого интервала $h = 14 : 7 = 2$. Результаты группировки приведены в табл. 19.1.

Таблица 19.1

Номер интервала	Интервал	Частота m_i	$\sum m_i$	m_i/n	Накопленная относительная частота
1	[7; 9)	2	2	0,0364	0,0364
2	[9; 11)	4	6	0,0726	0,1091
3	[11; 13)	8	14	0,1455	0,2546
4	[13; 15)	12	26	0,2182	0,4728
5	[15; 17)	16	42	0,2909	0,7637
6	[17; 19)	10	52	0,1818	0,9455
7	[19; 21]	3	55	0,0545	1,0000

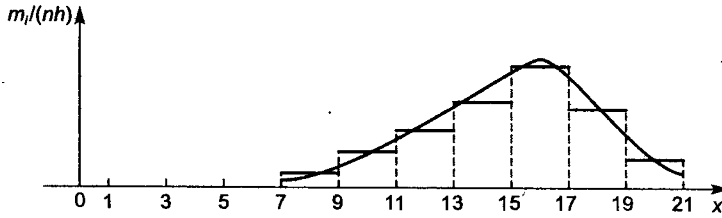


Рис. 19.2

В системе координат строим все интервалы, а на них – прямоугольники с высотами, равными $m_i/(nh)$, где $h = 2$ (рис. 19.2). ◄

АЗ-19.1

1. По данному распределению выборки

x_i	1	3	6
m_i	10	25	15

найти эмпирическую функцию и построить ее график.

2. Дана выборка:

x_i	2	4	5	7	10
m_i	15	20	10	10	45

Найти эмпирическую функцию распределения, построить ее график. Построить полигон относительных частот выборки.

3. По данным выборки построить гистограмму относительных частот:

а)

Номер интервала	Интервал	Число вариант в интервале
1	[1; 5)	10
2	[5; 9)	20
3	[9; 13)	50
4	[13; 17)	12
5	[17; 21]	8

б)

Номер интервала	Интервал	Число вариант в интервале
1	[2; 5)	6
2	[5; 8)	10
3	[8; 11)	5
4	[11; 14]	4

4. Дана выборка:

38	60	41	51	33	42	45	21	53	60
68	52	47	46	42	43	57	44	54	59
77	47	28	27	49	49	14	28	61	30
61	35	47	46	58	45	42	21	30	40
67	65	39	35	41	60	54	42	59	60

Построить гистограмму относительных частот.

5. Построить полигон относительных частот для следующей выборки:

x_i	4	6	10	12
m_i	10	15	5	20

Самостоятельная работа

1. Построить эмпирическую функцию распределения и ее график для данной выборки:

x_i	2	5	7	8
m_i	1	3	4	2

2. Построить эмпирическую функцию распределения и ее график для выборки:

x_i	2	5	7	10
m_i	5	25	15	5

3. Построить гистограмму относительных частот для выборки:

i	Интервал	m_i	i	Интервал	m_i
1	[10; 15)	2	4	[25; 30)	4
2	[15; 20)	4	5	[30; 35]	2
3	[20; 25)	8			

19.2. ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СТАТИСТИЧЕСКОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Любой параметр $\tilde{\theta}$, найденный по выборке, извлеченный из генеральной совокупности X, является подходящей оценкой параметра θ этой совокупности, если:

1) $M(\tilde{\theta}) = \theta$;

2) $P(|\tilde{\theta} - \theta| < \varepsilon) = 1$;

3) дисперсия $D(\theta)$ является минимальной.

Параметр $\tilde{\theta}$, удовлетворяющий условиям 1–3, называется соответственно *несмещенной, состоятельной* и *эффективной оценкой* параметра θ генеральной совокупности признака X.

Пусть $x_1, x_2, ..., x_n$ – выборка из генеральной совокупности. *Средним значением выборки* или *выборочным средним* называется число

$$x_{\text{в}} = \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i. \tag{19.1}$$

Если x_i – варианты выборки, m_i – частоты вариант x_i, $i = \overline{1, k}$, $n = \sum_{i=1}^{k} m_i$ – объем выборки, то

$$x_{\text{в}} = \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} m_i x_i. \tag{19.2}$$

Выборочное среднее является несмещенной, состоятельной и эффективной оценкой для математического ожидания генеральной совокупности.

Выборочной статистической дисперсией СВ X называется число

$$D^*(X) = s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$$

или

$$D^*(X) = s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} m_i(x_i - \bar{x})^2,$$

где $\bar{x}$ – выборочное среднее.

Так как $M(s^2) = \frac{n-1}{n}D(X)$, то в качестве несмещенной оценки дисперсии генеральной совокупности принимается величина

$$\tilde{D}(X) = s_0^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

или

$$\tilde{D}(X) = s_0^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{k} m_i(x_i - \bar{x})^2 . \qquad (19.3)$$

Величина s_0 называется *исправленным средним квадратичным отклонением.*

При известном математическом ожидании m_x несмещенная оценка дисперсии

$$s_0^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} m_i(x_i - m_x)^2 .$$

Если в каждом из наблюдений рассматриваются одновременно два признака X и Y с выборками:

X	x_1	x_2	...	x_k
m	m_1	m_2	...	m_k

,

Y	y_1	y_2	...	y_k
m	m_1	m_2	...	m_k

соответственно, то для характеристики их связи вводится *момент корреляции*

$$s_{xy} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{k} m_i(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) ,$$

где $\bar{x}$ и $\bar{y}$ – выборочные средние признаков X и Y; n – объем выборки.

Коэффициентом корреляции называют величину

$$r_{xy} = \frac{s_{xy}}{s_x s_y} ,$$

где s_x, s_y – выборочные средние квадратичные отклонения.

Замечание. При больших объемах выборок ($n \geq 30$) s и s_0 принимаются равными.

Непосредственно из определений следует, что

$$s_0^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{k} m_i x_i^2 - \frac{n}{n-1}\bar{x}^2 , \qquad (19.4)$$

$$s_{xy} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{k} x_i y_i - \frac{n}{n-1}\bar{x}\bar{y}. \qquad (19.5)$$

Величина

$$\mu_r = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} m_i (x_i - x)^r$$

называется *центральным моментом порядка r*. *Асимметрией выборки* называется число $a_3 = \mu_3/s^3$, *эксцессом (крутизной) выборки* – число $e_4 = \mu_4/s^4 - 3$. Асимметрия и эксцесс являются характеристиками отклонения эмпирического распределения от нормального.

Пример 1. По выборке признака X, заданной следующей таблицей:

x_i	45	50	55	60	65	70	75
m_i	4	6	10	40	20	12	8

найти выборочное среднее, дисперсию и среднее квадратичное отклонение.

▸ Объем выборки $n = \sum_{i=1}^{7} m_i = 100$. По формуле (19.2) выборочное среднее

$$\bar{x} = \frac{45\cdot 4 + 50\cdot 6 + 55\cdot 10 + 60\cdot 40 + 65\cdot 20 + 70\cdot 12 + 75\cdot 8}{100} = 61{,}7.$$

Для вычисления дисперсии составляем таблицу квадратов значений СВ X:

x_i^2	2025	2500	3025	3600	4225	4900	5625
m_i	4	6	10	40	20	12	8

По формуле (19.4) имеем:

$$s_0^2 = \frac{1}{99}\sum_{i=1}^{7} x_i^2 m_i - \frac{100}{99}(61{,}7)^2 = 50{,}11,$$

откуда $s_0 = \sqrt{50{,}11} \approx 7{,}08$.

Получили несмещенные оценки для дисперсии и среднего квадратичного отклонения. Соответствующие смещенные оценки $s^2 = 49{,}61$ и $s = 7{,}04$. ◂

Пример 2. Проведено несколько измерений расстояния. Результаты измерений в метрах представлены в виде ряда:

i	x_i	i	x_i	i	x_i	i	x_i
1	1235,6	5	1238,5	9	1234,5	13	1234,3
2	1237,5	6	1234,2	10	1236,8	14	1237,5
3	1232,9	7	1235,9	11	1237,6	15	1235,4
4	1236,2	8	1233,3	12	1233,1	16	1234,7

Вычислить оценки математического ожидания, дисперсии и среднего квадратичного отклонения измеренного расстояния.

▸ Введем условные варианты $u_i = x_i - a$, где в качестве a возьмем среднее число 1235, т.е. $a = 1235$. В результате получим таблицу для условных вариант:

i	u_i	i	u_i	i	u_i	i	u_i
1	0,6	5	3,5	9	−0,5	13	−0,7
2	2,5	6	−0,8	10	1,8	14	2,5
3	−2,1	7	0,9	11	2,6	15	0,4
4	1,2	8	−1,7	12	−1,9	16	−0,3

Выборочное среднее в данном случае вычисляется по формуле

$$\bar{x} = a + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} m_i u_i = 1235 + \frac{1}{16}(16 - 8) = 1235{,}5.$$

Исправленная дисперсия

$$s_0^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{k} m_i u_i^2 - \frac{n}{n-1}(\bar{x} - a)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} m_i (u_i - \bar{u})^2,$$

где $\bar{u}$ – среднее значение условных вариант. Отсюда

$$s_0^2 = \frac{1}{15}(0{,}01 + 4 + 6{,}76 + 0{,}49 + 9 + 1{,}69 + 0{,}16 + 4{,}84 + 1 +$$

$$+ 1{,}69 + 4{,}41 + 5{,}76 + 1{,}44 + 4 + 0{,}01 + 0{,}64) = 3{,}06,$$

$$s_0 = \sqrt{s_0^2} = \sqrt{3{,}06} \approx 1{,}75 \text{ м.}$$ ◂

Пример 3. Найти выборочную дисперсию по данному распределению выборки:

x_i	0,01	0,04	0,08
m_i	5	3	2

▸ Для того чтобы избежать действий над дробями, перейдем к условным вариантам $u_i = 100x_i$. Получим следующее распределение:

u_i	1	4	8
m_i	5	3	2

Выборочную дисперсию условных вариант находим по формуле

$$s^2(u) = \frac{\sum_{i=1}^{3} m_i u_i^2}{n} - \left(\frac{\sum_{i=1}^{3} m_i u_i}{n}\right), \; n = \sum_{i=1}^{3} m_i = 10,$$

$$s^2(u) = \frac{5+48+128}{10} - \left(\frac{5+12+16}{10}\right)^2 = 7{,}21,$$

$$s^2(x) = s(u)/100^2 = 7{,}21/10\ 000 = 0{,}00072.$$

Исправленная выборочная днсперсия

$$s_0^2 = \frac{10}{9}s^2 \approx 0{,}0008. ◀$$

Пример 4. Сгруппированные значения выборки X даны в табл. 19.2.

Таблица 19.2

Номер интервала	Интервал	$\bar{x}_i$	m_i
1	[27,5; 29,5)	28,5	3
2	[29,5; 31,5)	30,5	9
3	[31,5; 33,5)	32,5	23
4	[33,5; 35,5)	34,5	33
5	[35,5; 37,5)	36,5	38
6	[37,5; 39,5)	38,5	34
7	[39,5; 41,5)	40,5	21
8	[41,5; 43,5)	42,5	8
9	[43,5; 45,5]	44,5	1

Вычислить среднее значение, среднее квадратичное отклонение, асимметрию и эксцесс выборки X ($\bar{x}_i$ – середины интервалов).

▶ Как следует из табл. 19.2, объем выборки равен 170. Возьмем в качестве среднего значения варианты $x_0 = 36{,}5$ и введем условные варианты:

$$u_i = \frac{x_i - x_0}{n} = \frac{x_i - 36{,}5}{2}.$$

Результаты вычислений запишем в таблицу (табл. 19.3).

Таблица 19.3

i	$\bar{x}_i$	m_i	u_i	$m_i u_i$	$m_i u_i^2$	$m_i u_i^3$	$m_i u_i^4$
1	28,5	3	–4	–12	48	–192	768
2	30,5	9	–3	–27	81	–243	729
3	32,5	23	–2	–46	92	–184	368
4	34,5	33	–1	–33	33	–33	33
5	36,5	38	0	0	0	0	0
6	38,5	34	1	34	34	34	34
7	40,5	21	2	42	84	168	336
8	42,5	8	3	24	72	216	648
9	44,5	1	4	4	16	64	256
$\sum_i$	–	170	–	–14	460	–170	3172

По результатам всех вычислений, приведенных в табл. 19.3, находим начальные моменты v_r, $r = \overline{1, 4}$:

$$v_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{9} m_i u_i = \bar{u} = -\frac{14}{170} \approx -0,082,$$

$$v_2 = \frac{\sum m_i u_i^2}{\sum m_i} = \frac{460}{170} \approx 2,706,$$

$$v_3 = \frac{\sum m_i u_i^3}{\sum m_i} = -\frac{170}{170} = -1,$$

$$v_4 = \frac{\sum m_i u_i^4}{\sum m_i} = \frac{3172}{170} \approx 18,658.$$

Определим центральные моменты μ_2, μ_3 и μ_4:

$$\mu_2 = v_2 - v_1^2 = 2,706 - (-0,082) = 2,699,$$

$$\mu_3 = v_3 - 3v_1 v_2 + 2v_1^2 = -1 - 3(-0,082)\cdot 2,706 + 2(-0,082) = -0,355,$$

$$\mu_4 = v_4 - 4v_1 v_3 + 6v_1^2 v_2 - 3v_1^4 = 18,658 - 4(-0,082)(-1) +$$
$$+ 6(-0,082)^2 \cdot 2,706 - 3(-0,082)^4 = 18,439.$$

Среднее значение выборки

$$\bar{x} = x_0 + \bar{u}h = x_0 + v_1 h = 36,5 + 2(-0,082) = 36,336,$$

а выборочная дисперсия

$$s^2 = h^2(v_2 - v_1^2) = 4(2,706 - (0,082)^2) = 9,824, \; s \approx 3,29.$$

Асимметрия

$$a_3 = \mu_3/\sqrt{\mu_2^3} = -0,355/\sqrt{(2,699)^3} = -0,026,$$

а эксцесс

$$e_4 = \mu_4/\mu_2^2 - 3 = -0,355/(2,699)^3 - 3 = -0,48. \blacktriangleleft$$

Пример 5. Методом произведений найти выборочное среднее и выборочную дисперсию распределения выборки:

x_i	12	14	16	18	20	22
m_i	5	15	50	16	10	4

▸ По определенному правилу составляем расчетную таблицу (табл. 19.4).

Таблица 19.4

x_i	m_i	u_i	m_iu_i	$m_iu_i^2$	$m_i(u_i+1)^2$
12	5	−2	−10	20	5
14	15	−1	−15	15	0
16	150	0	$\boxed{-25}$	0	50
18	16	1	16	16	64
20	10	2	20	40	90
22	4	3	12	36	64
–	–	–	$\boxed{+48}$	–	–
$\sum_i$	$n = 100$	–	23	127	273

1. В первый столбец записываем значения вариант x_i.

2. Во второй столбец записываем частоты вариант.

3. В качестве нуля выбираем число $x_0 = 16$ – значение варианты с наибольшей частотой. Так как шаг между вариантами $h = 2$, то условные варианты вводим согласно равенству $u_i = (x_i - x_0)/h$ и значения условных вариант помещаем в третьем столбце.

4. Произведение частот и значений условных вариант записываем в четвертый столбец, указывая при этом сумму отрицательных и сумму положительных произведений (в таблице эти суммы взяты в рамки).

5. В пятом столбце приводим произведения частот и квадратов условных вариант.

6. В шестой столбец записываем величины $m_i(u_i + 1)^2$ и находим их сумму.

Для контроля вычислений пользуемся тождеством

$$\sum_{i=1}^{6} (u_i + 1)^2 m_i = \sum_{i=1}^{6} m_i u_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{6} m_i u_i + n .$$

Контроль:

$$\sum_{i=1}^{6} m_i (u_i + 1)^2 = 273 ,$$

$$\sum_{i=1}^{6} m_i u_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{6} m_i u_i + n = 127 + 2 \cdot 23 + 100 = 273 .$$

Совпадение контрольных сумм свидетельствует о правильности вычислений, приведенных в табл. 19.4.

Вычислим начальные моменты первого и второго порядка условных вариант:

$$v_1 = \frac{\sum m_i u_i}{n} = \frac{23}{100} = 0,23,$$

$$v_2 = \frac{\sum m_i u_i^2}{n} = \frac{127}{100} = 1,27.$$

Тогда

$$\bar{x} = v_1 h + x_0 = 0,23 \cdot 2 + 16 = 16,46,$$

$$s^2 = (v_2 - v_1)^2 h^2 = (1,27 - (0,23)^2) \cdot 2^2 = 4,87,$$

откуда $s_0^2 = 4,92$, $s_0 = 2,22$, т.е. получили несмещенные оценки для дисперсии и среднего квадратичного отклонения. ◀

Пример 6. Методом сумм вычислить выборочное среднее и выборочную дисперсию по заданному распределению выборки объемом $n = 100$:

x_i	48	52	56	60	64	68	72	76	80	84
m_i	2	4	6	8	12	30	18	8	7	5

▶ Так как выборка состоит из равноотстоящих вариант с шагом $h = 4$, то

$$\bar{x} = v_1 h + x_0, \; s^2 = (v_2 - v_1^2) h^2,$$

где x_0 – ложный нуль. При вычислении по методу сумм условные моменты первого и второго порядка определяем по формулам:

$$v_1 = d_1 / n, \; v_2 = (s_1 + 2s_2)/n,$$

где $d_1 = a_1 - b_1$; $s_1 = a_1 + b_1$; $s_2 = a_2 + b_2$. Числа a_1, a_2, b_1 и b_2 находим следующим образом.

По определенному правилу составляем расчетную таблицу (табл. 19.5).

Таблица 19.5

x_i	m_i	$b_1 = 72$	$b_2 = 70$
48	2	2	2
52	4	6	8
56	6	12	20
60	8	20	40
64	12	32	0
68	30	0	0
72	18	38	0
76	8	20	37
80	7	12	17
84	5	5	5
–	$n = 100$	$a_1 = 75$	$a_2 = 59$

1. В первый столбец записываем значения вариант.

2. Во второй столбец помещаем частоты и их сумму.

3. В качестве ложного нуля выбираем значение варианты наибольшей частоты ($x_0 = 68$); на пересечении третьего и четвертого столбцов и строки, содержащей ложный нуль, ставим нули. В четвертом столбце над ложным нулем и под ним также пишем нули.

4. В оставшихся клетках третьего столбца, расположенных над нулем, записываем накопления частот и находим их сумму: $b_1 = 72$. Аналогично в клетках третьего столбца, расположенных под нулем, записываем последовательные накопления частот и вычисляем их сумму: $a_1 = 75$.

5. Аналогично заполняем четвертый столбец, где находятся числа $b_2 = 70$ и $a_2 = 59$.

По результатам вычислений в табл. 19.5 имеем:

$$d_1 = a_1 - b_1 = 75 - 72 = 3,$$

$$s_1 = a_1 + b_1 = 75 + 72 = 147,$$

$$s_2 = a_2 + b_2 = 59 + 70 = 129.$$

Тогда моменты условных вариант

$$v_1 = d_1/n = 3/100 = 0{,}03,$$

$$v_2 = (s_1 + 2s_2)/n = (147 + 2 \cdot 129)/100 = 4{,}05.$$

Так как $h = 4$ и $x_0 = 68$, то

$$\bar{x} = v_1 h + x_0 = 0{,}03 \cdot 4 + 68 = 68{,}12,$$

$$s^2 = (v_2 - v_1^2)h = (4{,}05 - (0{,}03)^2) \cdot 4^2 = 64{,}78. \blacktriangleleft$$

Пример 7. Сгруппированные данные выборки значений системы СВ (X, Y) приведены в табл. 19.6. Найти статистические оценки для математических ожиданий и дисперсий и коэффициеит корреляции выборки.

Таблица 19.6

$Y \backslash X$	$x_1 = 8$	$x_2 = 10$	$x_3 = 12$	$x_4 = 14$	$x_5 = 16$	$x_6 = 18$
$y_1 = 1$	2	3	–	–	–	1
$y_2 = 4$	1	5	4	3	1	–
$y_3 = 7$	–	1	10	2	–	–
$y_4 = 10$	1	–	18	8	2	3
$y_5 = 13$	–	1	3	7	10	5
$y_6 = 16$	1	–	–	–	3	5

$\blacktriangleright$ Объем выборки $n = 100$. Возьмем в качестве ложного нуля точку M_0 (12,10). Согласно табл. 19.6 $h_x = 2$, $h_y = 3$. Построим таблицу распределения условных вариант $u_i = (x_i - 12)/2$, $v_j = (y_j - 10)/3$ (табл. 19.7).

Таблица 19.7

$v_i \backslash u_i$	-2	-1	0	1	2	3	m_{y_j}	$m_{y_j}v$	$m_{y_j}v^2$	$v_j\sum m_{x_i}m_{y_i}u_i$
-3	2	3	–	–	–	1	6	-18	54	12
-2	1	5	4	3	1	–	14	-28	56	4
-1	–	1	10	2	–	–	13	-13	13	-1
0	1	–	18	8	2	3	32	0	0	0
1	–	1	3	7	10	5	26	26	26	31
2	1	–	–	–	3	5	9	18	72	36
m_{x_i}	5	10	35	20	16	14	100	-15	221	82
$m_{x_i}u$	-10	-10	0	20	32	48	80			
$m_{x_i}u^2$	20	10	0	20	64	144	258			

На основании полученных в табл. 19.7 результатов имеем:

$$\bar{v} = \frac{\sum\limits_{j=1}^{6} m_{yj}v_j}{n} = -\frac{15}{100} = -0,15,$$

$$\bar{u} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{6} m_{x_i}u_i}{n} = \frac{80}{100} = 0,8,$$

$$\overline{v^2} = \frac{\sum\limits_{j=1}^{6} m_{y_j}v_j^2}{n} = \frac{221}{100} = 2,21,$$

$$\overline{u^2} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{6} m_{x_i}u_i^2}{n} = \frac{228}{100} = 2,28,$$

$$s_v^2 = \overline{v^2} - (\bar{v})^2 = 2,21 - 0,0225 = 2,1875,$$

$$s_u^2 = \overline{u^2} - (\bar{u})^2 = 2,28 - 0,64 = 1,64,$$

$$s_v = \sqrt{2,187} \approx 1,479, \quad s_u = \sqrt{1,64} \approx 1,281,$$

$$\bar{y} = 12 + 2(-0,15) = 11,7,$$

$$\bar{x} = 10 + 3 \cdot 0,8 = 12,4,$$

$$s_y = s_v h_y = 1,479 \cdot 3 = 4,437, \quad s_x = s_u h_x = 1,281 \cdot 2 = 2,562.$$

Коэффициент корреляции

$$r_{xy} = \frac{\overline{uv} - \overline{u}\,\overline{v}}{s_u s_v},$$

где

$$\overline{uv} = \frac{\sum_{i,j=1}^{6} m_{ij} u_i v_j}{n} = \frac{82}{100} = 0,82,$$

откуда

$$r_{xy} = \frac{0,82 - (-0,15) \cdot 0,8}{1,479 \cdot 1,281} = \frac{0,832}{1,894} \approx 0,439. ◄$$

АЗ-19.2

1. Найти выборочное среднее по заданному распределению выборки объемом $n = 20$:

x_i	2560	2600	2620	2650	2700
m_i	2	3	10	4	1

(*Ответ:* 2621.)

2. Найти выборочную дисперсию по данному распределению выборки объемом $n = 10$:

x_i	186	192	194
m_i	2	5	3

(*Ответ:* 8,93.)

3. Найти методом произведений выборочное среднее и выборочную дисперсию по заданному распределению выборки объемом $n = 100$:

x_i	2	3	7	9	11	12,5	16	18	23	25	26
m_i	3	5	10	6	10	4	12	13	8	20	9

(*Ответ:* $\bar{x} = 15,86$, $s^2 = 45,14$.)

4. Методом произведений найти выборочные среднее, дисперсию, асимметрию и эксцесс по заданному распределению выборки объемом $n = 100$:

x_i	12	14	16	18	20	22
m_i	5	15	50	16	10	4

(*Ответ:* $\bar{x} = 16{,}46$, $D(x) = 4{,}87$, $a_3 = 0{,}47$, $e_4 = 0{,}36$.)

5. Найти выборочное среднее и выборочное среднее квадратичное отклонение выборки объемом $n = 20$, распределение которой задано таблицей (табл. 19.8).

Таблица 19.8

Номер интервала	Интервал	Частота m_i	Номер интервала	Интервал	Частота m_i
1	$(-15; -0{,}13)$	3	8	$(-0{,}01; 0{,}01)$	18
2	$(-0{,}13; -0{,}11)$	8	9	$(0{,}01; 0{,}03)$	17
3	$(-0{,}11; -0{,}09)$	11	10	$(0{,}03; 0{,}05)$	17
4	$(-0{,}09; -0{,}07)$	20	11	$(0{,}05; 0{,}07)$	8
5	$(-0{,}07; -0{,}05)$	27	12	$(0{,}07; 0{,}09)$	4
6	$(-0{,}05; -0{,}03)$	36	13	$(0{,}09; 0{,}11)$	1
7	$(-0{,}03; -0{,}01)$	29	14	$(0{,}11; 0{,}13)$	1

(*Ответ:* $\bar{x} = -0{,}284$, $s = 0{,}0515$.)

Самостоятельная работа

По данным выборкам найти выборочные средние и средние квадратичные отклонения.

1.

x_i	1250	1275	1280	1300
m_i	20	25	50	5

(*Ответ:* $\bar{x} = 1273{,}75$, $s = 13{,}054$.)

2.

x_i	12,5	17,5	22,5	27,5	32,5
m_i	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

(*Ответ:* $\bar{x} = 22{,}5$, $s = 5{,}45$.)

3.

Интервал	(28; 30)	(30; 32)	(32; 34)	(34; 36)	(36; 38)	(38; 40)	(40; 42)	(42; 44)
m_i	8	15	15	12	15	20	10	5

(*Ответ:* $\bar{x} = 35{,}72$, $s = 4{,}012$.)

19.3. ОЦЕНКА ЧИСЛОВЫХ ХАРАКТЕРИСТИК. МЕТОД МОМЕНТОВ

Метод моментов точечной оценки неизвестных параметров распределения. Данный метод состоит в приравнивании эмпирических и теоретических моментов, соответствующих эмпирическим моментам того же порядка, например $M(X) = \bar{x} = \nu_1$. Если распределение определено двумя параметрами, то приравниваются два теоретических и два эмпирических момента $\nu_1 = M(X)$, $\mu_2 = M(X-\bar{x})^2$, т.е. $M(X) = \bar{x}$ и $D(X) = s^2$.

Пример 1. Случайная величина X распределена по закону Пуассона

$$P_m(x_i) = \frac{\lambda^{x_i} e^{-\lambda}}{x_i!},$$

где m – число испытаний; x_i – число появлений события A в этих испытаниях. По выборке $x_1, x_2, \ldots, x_n$ найти точечную оценку неизвестного параметра λ, определяющего распределение Пуассона.

▶ Для оценки одного параметра запишем уравнение относительно этого параметра:

$$\nu_1^* = M(X) = \bar{x}.$$

Так как в распределении Пуассона $M(X) = \lambda$, то $\lambda = \bar{x}$. Точечной оценкой параметра λ распределения Пуассона служит выборочное среднее $\bar{x}$. ◀

Метод наибольшего правдоподобия. Этот метод оценки неизвестных параметров заданного распределения сводится к отысканию максимума функции одного или нескольких оцениваемых параметров.

Функцией правдоподобия дискретной СВ X, принимающей значения x_i, $i = \overline{1, n}$, с вероятностями $P(x_i, \theta)$, называют функцию

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n, \theta) = P(x_1, \theta) P(x_2, \theta) \ldots P(x_n, \theta).$$

Если $f(x)$ – плотность распределения вероятностей СВ X с неизвестным параметром θ, то функцию правдоподобия непрерывной СВ X записывают в виде

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n, \theta) = f(x_1, \theta) f(x_2, \theta) \ldots f(x_n, \theta).$$

При двух неизвестных параметрах распределения θ_1 и θ_2 функция правдоподобия имеет вид

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n, \theta_1, \theta_2) = f(x_1, \theta_1, \theta_2) f(x_2, \theta_1, \theta_2) \dots f(x_n, \theta_1, \theta_2).$$

Логарифмической функцией правдоподобия называют функцию $\ln L$. Точки экстремума функции $\ln L$ с одним неизвестным параметром θ ищут по следующей схеме:

1) находят производную $\dfrac{d \ln L}{d\theta}$;

2) определяют точки, в которых эта производная равна нулю, т.е. корни уравнения правдоподобия $\dfrac{d \ln L}{d\theta} = 0$;

3) вычисляют вторую производную $\dfrac{d^2 \ln L}{d\theta^2}$ в найденных точках; если в точке θ^* вторая производная меньше нуля, то θ^* – точка максимума; если же вторая производная положительна при θ^*, то θ^* – точка минимума. Значение параметра θ^*, при котором $\ln L$ достигает максимума, принимается за величину оцениваемого параметра.

Пример 2. Методом наибольшего правдоподобия по выборке $x_1, x_2, \dots, x_n$ найти точечную оценку неизвестного параметра λ показательного распределения

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{при } x \ge 0, \\ 0 & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

▸ Составляем функцию правдоподобия:

$$L = f(x_1, \theta) f(x_2, \theta) \dots f(x_n, \theta).$$

Учитывая, что $\lambda = \theta$, имеем:

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda) = (\lambda e^{-\lambda x_1})(\lambda e^{-\lambda x_2}) \dots (\lambda e^{-\lambda x_n}) = \lambda^n e^{-\lambda \sum\limits_{i=1}^{n} x_i}.$$

Находим логарифмическую функцию правдоподобия:

$$\ln L = n \ln \lambda - \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Так как $\dfrac{d \ln \lambda}{d\lambda} = n\dfrac{1}{\lambda} - \sum\limits_{i=1}^{n} x_i$, то уравнение правдоподобия имеет вид

$$n\frac{1}{\lambda} - \sum_{i=1}^{n} x_i = 0 .$$

Решив его, получим критическую точку

$$\lambda = n / \sum_{i=1}^{n} x_i = 1/\bar{x} .$$

Вторая производная $\frac{d^2 \ln L}{d\lambda^2} = -n\lambda^{-2} < 0$ при $\lambda = 1/\bar{x}$. Это значит, что $\lambda = 1/\bar{x}$ – точка максимума функции L. Следовательно, оцениваемый точечный параметр – $\lambda = 1/\bar{x}$. ◂

Интервальные оценки параметров. Интервал $(\theta_1; \theta_2)$, в который оцениваемый параметр θ попадает с заданной вероятностью γ, называется *доверительным*, а γ – *доверительной вероятностью (надежностью)* оцениваемого параметра θ:

$$P(\theta_1 < \theta < \theta_2) = \gamma .$$

Число $\alpha = 1 - \gamma$ называется *уровнем значимости*. В практических задачах обычно принимают $\alpha = 0{,}1$; 0,05; 0,001. Если $\alpha = 0{,}05$, то $(1 - 0{,}05) \cdot 100 = 95$ из 100 значений оцениваемого параметра будут находиться внутри интервала $(\theta_1; \theta_2)$.

Отыскание доверительного иитервала для математического ожидания m_x нормально распределенного количественного признака X при известном среднем квадратичном отклонении σ проводится по приводимому ниже правилу.

Пусть $x_1, x_2, ..., x_n$ – выборка объемом n и γ – доверительная вероятность, $\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i / n$ – выборочное среднее. Тогда

$$\bar{x} - t\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < m_x < \bar{x} + t\frac{\sigma}{\sqrt{n}} , \tag{19.6}$$

где $x = t$ – значение аргумента функции Лапласа $\Phi(t)$, при котором $\Phi(t) = \gamma/2$.

Пример 3. Найти доверительный интервал для оценки с надежностью $\gamma = 0{,}99$ неизвестного математического ожидания m_x нормально распределенного признака X генеральной совокупности, если объем выборки $n = 25$, $\bar{x} = 16{,}8$ и среднее квадратичное отклонение генеральной совокупности $\sigma = 5$.

▸ Доверительный интервал определяется неравенствами (19.6). Находим t из уравнения $\Phi(t) = \gamma/2 = 0{,}495$, пользуясь прил. 4: $t = 2{,}58$. Тогда из неравенств (19.6) следует, что

$$16{,}8 - 2{,}58 \cdot 5/5 < m_x < 16{,}8 + 2{,}58 \cdot 5/5,$$

$$14{,}22 < m_x < 19{,}38, \quad m_x \in (14{,}22;\ 19{,}38)$$

с вероятностью $\gamma = 0{,}99$. ◂

Доверительный интервал для математического ожидания при неизвестном среднем квадратичном отклонении нормально распределенной СВ X определяется из неравенств

$$\bar{x} - t_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}} < m_x < \bar{x} + t_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}}, \qquad (19.7)$$

где n – объем выборки; $\bar{x}$ – выборочное среднее; s – среднее квадратичное отклонение выборки; γ – доверительная вероятность; значение параметра t_γ определяется из равенства

$$\gamma = \int_{-t_\gamma}^{t_\gamma} s(t,\ n)\,dt,$$

в котором подынтегральная функция задает *плотность Стьюдента* распределения вероятностей случайной величины:

$$T = u\sqrt{n/\nu},$$

где u и ν – независимые СВ: u – нормально распределенная СВ с параметрами $m_x = 0$, $\sigma = 1$, а ν имеет распределение χ^2 с n степенями свободы. Число t_γ находится из прил. 8 по заданному уровню значимости $\alpha = 1 - \gamma$ (надежности γ) при числе степеней свободы $k = n - 1$.

Пример 4. Из генеральной совокупности извлечена выборка объемом $n = 10$:

x_i	-2	1	2	3	4	5
m_i	2	1	2	2	2	1

Найти доверительный интервал для математического ожидания m_x с надежностью $\gamma = 0{,}95$.

▸ Вычисляем выборочное среднее:

$$\bar{x} = \frac{-2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 2 + 5 \cdot 1}{10} = 2$$

и исправленное среднее квадратичное отклонение:

$$s = \sqrt{\frac{2 \cdot 4^2 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2^2 + 3^2}{9}} = 2{,}4.$$

Из прил. 8 при $\gamma = 0{,}95$ и $n = 10$ $(k = 9)$ находим: $t_\gamma = 2{,}26$. Доверительным интервалом на основании неравенств (19.7) будет

$$2 - 2{,}26 \cdot \frac{2{,}4}{10} < m_x < 2 + 2{,}26 \cdot \frac{2{,}4}{10}, \ m_x \in (0{,}3;\ 3{,}7)$$

с надежностью $\gamma = 0{,}95$. ◀

Доверительный интервал с заданной надежностью γ для среднего квадратичного отклонения σ нормально распределенного признака X по исправленному среднему квадратичному отклонению s определяем по формулам:

$$s(1-q) < \sigma < s(1+q) \ \text{при} \ q < 1,$$
$$0 < \sigma < s(1+q) \ \text{при} \ q > 1, \tag{19.8}$$

где параметр q находим из прил. 9.

Пример 5. Произведено 12 измерений некоторой величины одним прибором без систематической ошибки, причем исправленное среднее квадратичное отклонение s случайных ошибок измерений оказалось равным 0,5. Найти точность прибора с надежностью $\gamma = 0{,}99$, если результаты ошибок измерений распределены нормально.

▶ Точностью прибора обычно называют среднее квадратичное его ошибок измерения. Из неравенств (19.8) следует, что q определяется при $n = 12$, $\gamma = 0{,}99$ из прил. 9 и неравенства $1 > q = 0{,}9$. Значит, $0{,}5 \cdot 0{,}1 < \sigma < 0{,}5 \cdot 1{,}9$. Таким образом, $\sigma \in (0{,}05;\ 0{,}95)$ с вероятностью $\gamma = 0{,}99$. ◀

АЗ-19.3

1. Методом моментов по выборке $x_1, x_2, \ldots, x_n$ найти точечную оценку неизвестного параметра λ распределения СВ X, зная, что плотность распределения вероятностей

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{при } x \geq 0. \end{cases}$$

(*Ответ:* $1/\bar{x}$.)

2. Случайная величина X (число появлений события A в n независимых испытаниях) подчинена биномиальному распределению с неизвестным параметром распределения p. Проведено 10 опытов по 5 испытаний в каждом. В результате получено эмпирическое распределение

x_i	0	1	2	3	4	5
m_i	4	2	1	1	1	1

где x_i – число появлений события A в одном опыте; m_i – количество опытов, в которых A появилось x_i раз. Методом моментов найти точечную оценку параметра p биномиального распределения. (*Ответ:* $p = 0{,}32$.)

3. Случайная величина X – ошибка измерения дальности радиодальномера – подчинена равномерному распределению с неизвестными параметрами a и b. Статистическое распределение СВ X имеет вид:

x_i	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21
m_i	21	16	15	26	22	14	21	22	18	25

где x_i – средняя ошибка измерений; m_i – количество измерений, имеющих среднюю ошибку x_i. Методом моментов найти точечные оценки неизвестных параметров a и b равномерного распределения. (*Ответ:* $a = 2{,}24$, $b = 2{,}38$.)

4. Методом наибольшего правдоподобия найти по выборке $x_1, x_2, ..., x_n$ точечную оценку параметра p геометрического распределения $P(X = x_i) = (1-p)^{x_i} p$, где p – вероятность появления события в отдельном испытании. (*Ответ:* $p = 1/\bar{x}$.)

5. Найти минимальный объем выборки, при котором с надежностью $\gamma = 0{,}975$ точность оценки математического ожидания m_x генеральной совокупности по выборочному среднему равна $\delta = 0{,}3$, если известно среднее квадратичное отклонение $\sigma = 1{,}2$ генеральной совокупности, распределенной нормально. (*Ответ:* $n = 81$.)

6. Дано: $\bar{x} = 2000$ м, $\sigma_x = 40$ м, $\gamma = 0{,}95$. Найти доверительный интервал для m_x, если X – нормально распределенная СВ. (*Ответ:* (1964,94; 2035,06).)

7. Из генеральной совокупности извлечена выборка объемом $n = 12$:

x_i	−0,5	−0,4	−0,2	0	0,2	0,6	0,8	1	1,2	1,5
m_i	1	2	1	1	1	1	1	1	2	1

Найти доверительный интервал для математического ожидания нормально распределенной генеральной совокупности, если доверительная вероятность $\gamma = 0{,}95$. (*Ответ:* (−0,04; 0,88).)

8. Каково должно быть число опытов, чтобы с надежностью $\gamma = 0{,}95$ точность оценки математического ожидания m_x была равной $\delta = 0{,}2$, если среднее квадратичное отклонение $\sigma_x = 4$. (*Ответ:* $n \geq 1537$.)

9. По данным выборки объемом n, извлеченной из нормально распределенной генеральной совокупности, найдено исправленное среднее квадратичное отклонение s. Определить доверительный интервал, покрывающий генеральное среднее квадратичное отклонение σ с надежностью $\gamma = 0{,}999$, если: а) $n = 10$, $s = 5{,}1$; б) $n = 50$, $s = 14$. (*Ответ:* а) (0; 14,28); б) (7,98; 20,02).)

Самостоятельная работа

1. Результаты четырех измерений однотипных деталей: $x_1 = 0{,}25$ м, $x_2 = 0{,}24$ м, $x_3 = 0{,}25$ м, $x_4 = 0{,}26$ м. Считая распределение длины X деталей нормальным, найти доверительный интервал истинной длины детали с надежностью $\gamma = 0{,}95$. (*Ответ:* (0,12; 0,38).)

2. Произведено 5 независимых опытов над СВ X, нормально распределенной с неизвестным параметром m_x и $\sigma_x = 2$. Результаты опыта приведены в следующей таблице:

x_i	−25	−20	10	21	34
m_i	1	1	1	1	1

Найти доверительный интервал для m_x с надежностью $\gamma = 0{,}9$. (*Ответ:* (2,53; 5,47).)

3. Из генеральной совокупности X с нормальным распределением извлечена выборка объемом $n = 10$ и составлен статистический ряд:

x_i	-2	1	2	3	4	5
m_i	0,2	0,1	0,2	0,2	0,2	0,1

Найти доверительный интервал для математического ожидания m_x с надежностью $\gamma = 0{,}95$. (*Ответ:* (0,28; 3,72).)

19.4. МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ. КОРРЕЛЯЦИОННАЯ СВЯЗЬ

Пусть зависимость y от x выражается формулой

$$y = f(x, \alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m),$$

где $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m$ – неизвестные параметры, подлежащие определению. В результате n независимых опытов по заданным значениям $x_1, x_2, \ldots, x_n$ переменной x получены соответствующие значения функции $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Будем считать, что наивероятнейшие значения для параметров $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m$ дают минимум функции этих параметров $S(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m)$:

$$S = \sum_{i=1}^{n} (y_i - f(x_i, \alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m))^2 .$$

Необходимые условия минимума функции S записываются в виде системы $m + 1$ уравнений:

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_0} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial \alpha_1} = 0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial S}{\partial \alpha_m} = 0. \qquad (19.9)$$

Нахождение зависимости между Y и X из опытных данных называют *выравниванием эмпирических данных вдоль кривой* $y = f(x, \alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m)$.

На практике функция $f(x, \alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ обычно задается в таком виде, что параметры $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m$ входят в нее линейно. Поэтому $f(x, \alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ имеет непрерывные частные производные по всем параметрам α_i, $i = \overline{0, m}$. Например,

$$f(x, \alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots + \alpha_m x^m .$$

В данном случае система (19.9) принимает вид

$$\left.\begin{aligned}
&\alpha_0 n+\alpha_1\sum_{i=1}^{n}x_i+\ldots+\alpha_m\sum_{i=1}^{n}x_i^m=\sum_{i=1}^{n}y_i,\\
&\alpha_0\sum_{i=1}^{n}x_i+\alpha_1\sum_{i=1}^{n}x_i^2+\ldots+\alpha_m\sum_{i=1}^{n}x_i^{m+1}=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\alpha_0\sum_{i=1}^{n}x_i^m+\alpha_1\sum_{i=1}^{n}x_i^{m+1}+\ldots+\alpha_m\sum_{i=1}^{n}x_i^{2m}=\sum_{i=1}^{n}y_ix_i^m.
\end{aligned}\right\}\qquad(19.10)$$

В частности, по заданным опытным точкам $M(x_i,\ y_i)$, $i=\overline{1,n}$, можно найти оценки параметров линейной функции $y=\alpha_0+\alpha_1 x$. Система линейных уравнений (19.10) в этом случае принимает вид

$$\left.\begin{aligned}
&\alpha_0 n+\alpha_1\sum_{i=1}^{n}x_i=\sum_{i=1}^{n}y_i,\\
&\alpha_0\sum_{i=1}^{n}x_i+\alpha_1\sum_{i=1}^{n}x_i^2=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i.
\end{aligned}\right\}\qquad(19.11)$$

Если по опытным точкам $M(x_i,\ y_i)$, $i=\overline{1,n}$, искать оценки для параметров α_0, α_1, α_2 зависимости $y=\alpha_0+\alpha_1 x+\alpha_2 x^2$, то система (19.10) примет вид

$$\left.\begin{aligned}
&\alpha_0 n+\alpha_1\sum_{i=1}^{n}x_i+\alpha_2\sum_{i=1}^{n}x_i^2=\sum_{i=1}^{n}y_i,\\
&\alpha_0\sum_{i=1}^{n}x_i+\alpha_1\sum_{i=1}^{n}x_i^2+\alpha_2\sum_{i=1}^{n}x_i^3=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i,\\
&\alpha_0\sum_{i=1}^{n}x_i^2+\alpha_1\sum_{i=1}^{n}x_i^3+\alpha_2\sum_{i=1}^{n}x_i^4=\sum_{i=1}^{n}x_i^2y_i.
\end{aligned}\right\}\qquad(19.12)$$

Пример 1. В результате опыта получены значения СВ Y по заданным значениям СВ X:

x_i	0	4	10	15	21	29	36	51	68
m_i	66,7	71,0	76,3	80,6	85,7	92,9	99,4	113,6	125,1

Найти линейную зависимость $y = \alpha_1 x + \alpha_0$ по методу наименьших квадратов.

▸ По результатам эксперимента составляем таблицу (табл. 19.9).

Таблица 19.9

i	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
1	0	66,7	0	0
2	4	71,0	16	284,0
3	10	76,3	100	763,0
4	15	80,6	225	1209,0
5	21	85,7	441	1799,7
6	29	92,9	841	2694,1
7	36	99,4	1296	3578,4
8	51	113,6	2601	5793,6
9	68	125,1	4624	8506,8
$\sum_i$	234	811,3	10 144	24 628,6

Так как $n = 9$, то система (19.11) принимает вид

$$\left.\begin{aligned} 9\alpha_0 + 234\alpha_1 &= 811{,}3, \\ 234\alpha_0 + 10\ 144\alpha_1 &= 24\ 628{,}6. \end{aligned}\right\}$$

Умножив первое уравнение на -26 и сложив со вторым, получим: $4060\alpha_1 = 3534{,}8$ или $\alpha_1 = 0{,}87$. Тогда $9\alpha_0 = 811{,}3 - 203{,}58 = 607{,}72$, $\alpha_0 = 67{,}5$.

Следовательно, зависимость y от x имеет вид

$$y = 67{,}5 + 0{,}87x. \blacktriangleleft$$

Пример 2. Значения некоторого признака Y по значениям признака X характеризуются опытными данными:

X	1	2	3	4	5	6	7
Y	0,5	0,5	1,5	3,5	6,5	10,5	15,5

Выравнять зависимость Y от X по параболе $y = \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0$.

▸ Для составления системы уравнений (19.12) записываем расчетную таблицу (табл. 19.10).

Таблица 19.10

i	x_i	y_i	x_i^2	x_i^3	x_i^4	$x_i y_i$	$x_i^2 y_i$
1	1	0,5	1	1	1	0,5	0,5
2	2	0,5	4	8	16	1	2
3	3	1,5	9	27	81	4,5	13,5
4	4	3,5	16	64	256	14	56
5	5	6,5	25	125	625	32,5	162,5
6	6	10,5	36	216	1296	63	378
7	7	15,5	49	343	2401	108,5	759,5
$\sum_i$	28	38,5	140	784	4676	224	1372

По результатам вычислений составляем систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} 7\alpha_0 + 28\alpha_1 + 140\alpha_2 &= 38{,}5, \\ 28\alpha_0 + 140\alpha_1 + 784\alpha_2 &= 224, \\ 140\alpha_0 + 784\alpha_1 + 4676\alpha_2 &= 1372. \end{aligned}\right\}$$

Определитель этой системы $\Delta = 8254$, а $\Delta\alpha_0 = 12\ 385{,}5$, $\Delta\alpha_1 = -12\ 385{,}5$, $\Delta\alpha_2 = 4128{,}5$. Тогда $\alpha_0 = 1{,}5$, $\alpha_i = -1{,}5$, $\alpha_2 = 0{,}5$. Искомая зависимость имеет вид

$$y = 1{,}5 - 1{,}5x + 0{,}5x^2. \blacktriangleleft$$

Если $\bar{y}_{x_i}$ – условные средние, то выравнивание точек $(x_i; \bar{y}_i)$, $i = \overline{1, n}$, по методу наименьших квадратов вдоль кривой $y = f(x, \alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ приводит к понятию *линии регрессии* y на x, а уравнение $\bar{y} = f(x, \alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ называется *уравнением регрессии* y на x. Если эта зависимость линейная, то получаем *прямую* $\bar{y} = \alpha_0 + \alpha_1 x$ *регрессии* y на x.

Уравнение прямой регрессии y на x имеет вид

$$y - \bar{y} = \rho_{y/x}(x - \bar{x}), \tag{19.13}$$

где $\bar{x}$, $\bar{y}$ – средние значения признаков X и Y; $\rho_{y/x} = r_{xy}s_y/s_x$; r_{xy} – коэффициент корреляции; s_x^2, s_y^2 – эмпирические дисперсии признаков X и Y.

Уравнение прямой регрессии x на y записывается в виде

$$x - \bar{x} = \rho_{x/y}(y - \bar{y}). \tag{19.14}$$

Пример 3. Из генеральной совокупности, в которой признаки X и Y распределены нормально, извлечена выборка объемом $n = 530$. Результаты измерения принаков X и Y выборки приведены в корреляционной таблице (табл. 19.11). Найти выборочный коэффициент корреляции и его среднее квадратичное отклонение. Записать уравнение прямых регрессий y на x и x на y.

Таблица 19.11

X \ Y	15–25	25–35	35–45	45–55	55–65	65–75	75–85	m_j
200–300	19	5	–	–	–	–	–	24
300–400	23	116	11	–	–	–	–	150
400–500	1	41	98	9	–	–	–	149
500–600	–	4	32	65	7	–	–	108
600–700	–	1	4	21	36	3	–	65
700–800	–	–	1	2	11	13	1	28
800–900	–	–	–	–	1	3	2	6
m_i	43	167	146	97	55	19	3	530

▸ Так как значения вариант признаков X, Y достаточно велики, а длина интервалов их значений соответственно $h_x = 100$, $h_y = 10$, то введем условные варианты:

$$u = 0{,}01(X-550),\ v = 0{,}1(Y-50).$$

Находим середины интервалов изменения признаков X и Y, вычисляем для этих значений величины условных вариант и составляем корреляционную таблицу (табл. 19.12), заполняем ее по указанной схеме. По результатам вычислений, сведенным в табл. 19.12, находим:

$$\bar{u} = \frac{\sum m_{x_i} u_i}{n} = -\frac{382}{530} = -0{,}721,$$

$$\bar{v} = \frac{\sum m_{y_j} v_j}{n} = -\frac{507}{530} = -0{,}957.$$

Тогда выборочные средние признаков X и Y:

$$\bar{x} = 500 + \bar{u}/h_x = 500 - 0{,}721/0{,}01 = 550 - 72{,}1 = 477{,}9,$$

$$\bar{y} = 50 + \bar{v}/h_y = 500 - 0{,}957/0{,}1 = 50 - 9{,}57 = 40{,}43.$$

Для вычисления дисперсий признаков X и Y находим дисперсии условных вариант u и v по формулам:

$$s_u^2 = \bar{u}^2 - (\bar{u})^2 = \frac{\sum m_x u_i^2}{n} - \left(\frac{\sum m_{x_i} u_i}{n}\right)^2 =$$

$$= 1196/530 - (-0{,}721)^2 = 2{,}257 - 0{,}520 = 1{,}737,$$

Таблица 19.12

	v	−3	−2	−1	0	1	2	3					
u	$X \backslash Y$	20	30	40	50	60	70	80	m_{x_i}	$m_{x_i}u_i$	$m_{x_i}u_i^2$	$\Sigma m_{ij}v_j$	$u_i \Sigma m_{ij}v_j$
−3	250	19	5	–	–	–	–	–	24	−72	216	−67	201
−2	350	23	116	11	–	–	–	–	150	−300	600	−312	624
−1	450	1	41	98	9	–	–	–	149	−149	149	−187	183
0	550	–	4	32	65	7	–	–	108	0	0	−33	0
1	650	–	1	4	21	36	3	–	65	65	65	36	36
2	850	–	–	1	2	11	13	1	28	56	112	39	78
3	850	–	–	–	–	1	3	2	6	18	54	13	39
–	m_{y_j}	43	167	146	97	55	19	3	530	−382	1196		1161
–	$m_{y_j}v_j$	−129	−334	−146	0	55	38	9	−507				
–	$m_{y_j}v_j^2$	387	668	146	0	55	76	27	1359				

$$s_v^2 = \overline{v^2} - (\bar{v})^2 = \frac{\sum m_{y_j} v_j^2}{n} - \left(\frac{\sum m_{y_j} v_j}{n}\right)^2 =$$

$$= \frac{1359}{530} - (-0,957)^2 = 2,564 - 0,916 = 1,648 .$$

Тогда $s_u = 1,32$, $s_v = 1,28$, а

$$s_x = s_u / h_x = 1,32/0,01 = 132 , \; s_y = s_v / h_y = 1,28/0,1 = 12,8 .$$

Коэффициеит корреляции признаков X, Y совпадает с коэффициентом корреляции условных вариант и вычисляется по формуле

$$r = \frac{\overline{uv} - \bar{u}\bar{v}}{s_u s_v} = \frac{1}{s_u s_v}\left(\frac{\sum m_{ij} u_i v_j}{n} - \frac{1}{n}\sum m_i u_i \frac{1}{n}\sum m_j v_j\right) =$$

$$= \frac{1}{1,32 \cdot 1,28}\left(\frac{1161}{530} - (-0,721)(-0,958)\right) =$$

$$= \frac{1}{1,32 \cdot 1,28}(2,191 - 0,69) = \frac{1,501}{1,69} \approx 0,888 .$$

Следовательно,

$$\rho_{y/x} = r\frac{s_y}{s_x} = 0,888 \cdot \frac{12,8}{132} \approx 0,0849 ,$$

$$\rho_{x/y} = r\frac{s_x}{s_y} = 0,888 \cdot \frac{132}{12,8} \approx 9,16 ,$$

а уравнение прямой регрессии y на x запишется в виде

$$y - 40,43 = 0,0849(x - 477,9) .$$

Прямая регрессин x на y имеет вид

$$x - 477,9 = 9,16(y - 40,43) .$$

При иормальном распределении признаков X и Y среднее квадратичное отклонение коэффициента корреляции

$$s_r = (1 - r^2)/\sqrt{n} = 0,009 . ◄$$

АЗ-19.4

1. Вычислить выборочный коэффициент корреляции по выборке сиетемы СВ (X, Y), распределение которой задано таблицей (табл. 19.13). Найти уравнение линейной регрессии Y на X. (*Ответ:* $r = 0,603$, $y = 0,659x + 12,34$.)

Таблица 19.13

Y \ X	10	20	30	40	50	60	m_{y_j}
15	5	7	–	–	–	–	12
25	–	20	23	–	–	–	43
35	–	–	30	47	2	–	79
45	–	–	10	11	20	6	47
55	–	–	–	9	7	3	19
m_{x_i}	5	27	63	67	29	9	200

2. По заданным значениям признака X получены соответствующие значения признака Y:

X	0,30	0,91	1,50	2,00	2,20	2,62	3,00	3,30
Y	0,20	0,43	0,35	0,52	0,81	0,68	1,15	0,85

Выравнять зависимость Y от X по прямой $y = \alpha_1 x + \alpha_0$. (*Ответ:* $\alpha_1 = 0{,}263$, $\alpha_0 = 0{,}120$.)

3. Таблица значений признака Y при данных значениях признака X имеет вид:

X	Y	X	Y	X	Y	X	Y	X	Y
12,0	54	16,1	76	20,0	107	24,1	139	28,1	178
13,1	59	17,4	85	21,4	118	25,0	153	30,0	203
14,0	67	18,0	97	21,9	127	26,8	160		

Методом наименьших квадратов выравнять зависимость Y от X по кривой $y = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2$. (*Ответ:* $y = 18{,}7 + 1{,}02x + 0{,}168x^2$.)

4. Соответствующие значения признаков X и Y приведены в табл. 19.14.

Таблица 19.14

$Y \backslash X$	0	1	2	3	4	5	6	7	m_{x_i}
25	2	1	–	–	–	–	–	–	3
35	–	5	3		–	–	–	–	8
45	–	–	4	2	4	–	–	–	10
55	–	–	–	–	2	3	1	5	11
65	–	–	–	–	–	–	6	2	8
m_{y_j}	2	6	7	2	6	3	7	7	40

Найти коэффициент линейной корреляции и записать уравнения прямых регрессий y на x и x на y. (*Ответ:* $r = 0{,}9$, $y - 3{,}9 = 0{,}17(x - 48{,}2)$, $x - 48{,}2 = 4{,}8(y - 3{,}9)$.)

5. Значения признаков X и Y заданы корреляционной таблицей (табл. 19.15). Найти коэффициент линейной корреляции и записать уравнения прямых регрессий y на x и x на y. (*Ответ:* $r = -0{,}899$, $y - 185{,}3 = -1{,}78(x - 96{,}72)$, $x - 96{,}72 = -0{,}454(y - 185{,}3)$.)

Таблица 19.15

$Y \backslash X$	10–20	20–30	30–40	40–50	50–60	60–70	m_{y_j}
120–140	–	–	–	–	3	4	7
140–160	–	–	–	2	5	2	9
160–180	–	–	3	6	3	–	12
180–200	–	5	4	4	–	–	13
200–220	7	4	2	–	–	–	13
220–240	5	2	–	–	–	–	7
240–260	3	–	–	–	–	–	3
m_{x_i}	15	11	9	12	11	6	64

Самостоятельная работа

Методом наименьших квадратов выравнять по прямым $y = \alpha_0 + \alpha_1 x$ следующие эмпирические данные.

1.

X	1	4	9	16	25
Y	0,1	3	8,1	14,9	23,9

(*Ответ:* $y = 0{,}922x - 0{,}909$.)

2.

X	1	2	3	4	5	6
Y	2	4,9	7,9	11,1	14,1	17

(*Ответ:* $y = 3{,}023x - 1{,}08$.)

3.

X	1	1,5	2	2,5	3
Y	2,1	2,2	2,7	2,8	2,85

19.5. СТАТИСТИЧЕСКАЯ ПРОВЕРКА ГИПОТЕЗ

Основные понятия и определения. Всякое утверждение, высказанное относительно неизвестного закона генеральной совокупности или относительно числовых характеристик этого закона (если известен закон распределения), называется *гипотезой.*

Основной (нулевой) гипотезой называют выдвинутую гипотезу H_0, а *конкурирующей (альтернативной)* – гипотезу H_1, которая противоречит нулевой гипотезе H_0.

Например, если нулевая гипотеза H_0 состоит в предположении, что среднее квадратичное отклонение нормального распределения $\sigma = 20$, то альтернативная гипотеза H_1 заключается в предположении, что $\sigma \neq 20$. Коротко это записывается так: $H_0: \sigma = 20$; $H_1: \sigma \neq 20$.

Гипотеза, содержащая только одно предположение, называется *простой,* а гипотеза, состоящая из некоторого числа предположений (простых гипотез), – *сложной.*

Поскольку проверку справедливости гипотез производят статистическими методами, то их называют *статистическими.* В ходе проверки могут быть допущены следующие ошибки. *Ошибка первого рода* заключается в том, что будет отвергнута правильная гипотеза. *Ошибка второго рода* состоит в том, что будет принята неправильная гипотеза.

Статистическим критерием (или просто *критерием*) называют СВ K, которая служит для проверки гипотезы H_0.

Наблюдаемым значением критерия K называется значение критерия $K_н$, вычисленное по выборкам.

Совокупность значений критерия K, при которых нулевую гипотезу отвергают, называется *критической областью.* Совокупность значений критерия K, при которых гипотезу H_0 принимают, называется *областью допустимых значений критерия* или *областью принятия гипотезы.*

Принцип проверки статистических гипотез. *Если наблюденное значение критерия принадлежит критической области, то гипотезу H_0 отвергают; если же наблюдаемое значение критерия принадлежит области принятия гипотезы, то гипотезу H_0 принимают.*

Точки, отделяющие критическую область от области принятия гипотезы, называют *критическими* и обозначают $k_{кр}$.

Правосторонняя критическая область определяется из равенства $P(K > k_{кр}) = \alpha$, *левосторонняя критическая область* – из равенства $P(K < k_{кр}) = \alpha$, а *двусторонняя критическая область* – из равенства

$$P(K < k_1) + P(K > k_2) = \alpha ,$$

где вероятность α называется *уровнем значимости*; k_1, k_2 – соответственно *левая* и *правая критические точки*. На практике при проверке гипотез обычно задается уровень значимости $\alpha = 0{,}05$; $0{,}01$; $0{,}001$.

Мощностью критерия называется вероятность попадания критерия в критическую область при условии, что справедлива конкурирующая гипотеза H_1. Точнее, мощность критерия есть вероятность того, что нулевая гипотеза будет отклонена, если верна конкурирующая гипотеза H_1. Если β – вероятность ошибки второго рода, то мощность критерия равна $1 - \beta$. Это значит, что при выбранном уровне значимости критическую область нужно строить так, чтобы мощность критерия была максимальной.

Замечание. Величины α и β равны вероятностям ошибок первого и второго рода соответственно. Чем меньше эти величины, тем «лучше» критическая область. Однако их одновременное уменьшение при заданном объеме выборки невозможно. Единственный способ сделать это состоит в увеличении объема выборки.

Проверка гипотезы о нормальном распределении генеральной совокупности с помощью критерия Пирсона. Рассмотрим выборку

X	x_1	x_2	...	x_s
m_i	m_1	m_2	...	m_s

с равноотстоящими значениями вариант. Требуется, используя критерий Пирсона, проверить гипотезу о том, что генеральная совокупность X распределена нормально.

Правило 1. *Для проверки гипотезы H_0 о нормальном распределении генеральной совокупности при заданном уровне значимости α необходимо:*

1) *вычислить выборочные среднее $x_в$ и среднее квадратичное отклонение $\sigma_в$;*

2) *вычислить теоретические частоты*

$$m'_i = \frac{nh}{\sigma_в}\varphi(u_i) ,$$

где n – объем выборки; h – разность между соседними вариантами;

$$u_i = \frac{x_i - \bar{x}_в}{\sigma_в} , \ \varphi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-u^2/2} ;$$

3) *сравнить эмпирические и теоретические частоты с помощью критерия χ^2 (Пирсона). Для этого:*

а) *составить таблицу* (табл. 19.16), *по которой находится наблюдаемое значение критерия:*

$$\chi_H^2 = \sum_i \frac{(m_i - m'_i)^2}{m'_i};$$

Таблица 19.16

i	m_i	m'_i	$m_i - m'_i$	$(m_i - m'_i)^2$	$(m_i - m'_i)^2/m'_i$
1	15	9,1	5,9	34,81	3,8
2	26	16,5	9,5	90,25	5,5
3	25	25,3	−0,3	0,09	0,0
4	30	32,0	−2,0	4,00	0,1
5	26	33,0	−7,9	62,41	1,8
6	21	29,8	−8,8	77,44	2,6
7	24	22,0	2,0	4,00	0,2
8	20	13,5	6,5	42,25	3,1
9	13	7,0	6,0	36,00	5,1
$\sum_i$	200	–	–	–	22,2

б) *из прил. 10 при заданном уровне значимости* α *и числе степеней свободы* $k = s - 3$ *(s – число групп выборки) найти критическую точку* $\chi^2_{кр}(\alpha, k)$ *правосторонней критической области.*

Если $\chi_H^2 < \chi^2_{кр}$, *то нет оснований отвергнуть гипотезу* H_0 *о нормальном распределении генеральной совокупности. Другими словами, эмпирические и теоретические частоты различаются незначимо.*

Если $\chi_H^2 > \chi^2_{кр}$, *то нулевую гипотезу отвергают, значит, различие эмпирических и теоретических частот значимо.*

Замечание. Число степеней свободы критерия Пирсона $k = s - r - 1$, где r – число параметров, оцениваемых по выборке.

Пример 1. Используя критерий Пирсона, при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ проверить, согласуется ли гипотеза о нормальном распределении генеральной совокупности X с эмпирическим распределением выборки объемом $n = 200$:

X	5	7	9	11	13	15	17	19	21
m_i	15	26	25	30	26	21	24	20	13

▸ Для вычисления выборочного среднего $\bar{x}$ и выборочного среднего квадратичного отклонения $\sigma_в$ методом произведений составляем таблицу (табл. 19.17), взяв в качестве условных вариант $v_i = (x_i - 13)/2$.

Таблица 19.17

x_i	m_i	v_i	$m_i v_i$	$m_i v_i^2$	$m_i(v_i+1)^2$
5	15	−4	−60	240	135
7	26	−3	−78	234	104
9	25	−2	−50	100	25
11	30	−1	−30	30	0
13	26	0	0	0	26
15	21	1	21	21	84
17	24	2	48	96	216
19	20	3	60	180	320
21	13	4	52	208	325
$\sum_i$	200	–	−37	1109	Контроль: 1235

По результатам вычислений, сведенным в табл. 19.17, находим:

$$\bar{v} = -37/200 = -0,185,\ \bar{x} = 13 - 0,185 \cdot 2 = 12,63,$$

$$\sigma_{\text{в}}^2 = (1109/200 - (-0,185)^2) \cdot 4 = 22,044,\ \sigma_{\text{в}} = 4,695.$$

Вычислим теоретические частоты (учитывая, что $n = 200$, $h = 2$, $\sigma_{\text{в}} = 4,695$) по формуле

$$m'_i = \frac{nh}{\sigma_{\text{в}}}\varphi(u_i) = \frac{200 \cdot 2}{4,695}\varphi(u_i) = 85,2\varphi(u_i),$$

где $u_i = (x_i - \bar{x})/\sigma_{\text{в}}$. Значения функции $\varphi(u)$ определяем из прил. 3. Последовательность вычислений приведена в табл. 19.18.

Таблица 19.18

i	x_i	$u_i = (x_i - \bar{x})/\sigma_{\text{в}}$	$\varphi(u_i)$	$m'_i = 85,2\varphi(u_i)$
1	5	−1,62	0,1074	9,1
2	7	−1,20	0,1942	16,5
3	9	−0,77	0,2966	25,3
4	11	−0,35	0,3752	32,0
5	13	0,08	0,3977	33,9
6	15	0,51	0,3503	29,8
7	17	0,93	0,2589	22,0
8	19	1,36	0,1582	13,5
9	21	1,78	0,0818	7,0

Пользуясь табл. 19.16, сравниваем эмпирические и теоретические данные.

Так как $\chi_H^2 = \sum\limits_i \frac{(m_i - m'_i)^2}{m'_i}$, то $\chi_H^2 = 22,2$.

Из таблицы критических точек распределения χ^2 (см. прил. 10) по уровню значимости $\alpha = 0,05$ и числу степеней свободы $k = s - r - 1 = 9 - 2 - 1 = 6$ находим, что $\chi^2_{кр}(0,05; 6) = 12,6$.

Так как $\chi^2_H > \chi^2_{кр}$, то гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности отвергаем. ◄

Пусть эмпирическое распределение задано в виде последовательности интервалов равной длины:

$(x_i; x_{i+1})$	$(x_1; x_2)$	$(x_2; x_3)$	...	$(x_s; x_{s+1})$
m_i	m_1	m_2	...	m_s

Для того чтобы проверить гипотезу H_0 о нормальном распределении генеральной совокупности X, используя критерий Пирсона, необходимо провести все вычисления согласно приводимому ниже правилу.

Правило 2. 1. *Методом произведений вычислить выборочное среднее $\bar{x}$ и выборочное среднее квадратичное отклонение $\sigma_в$. В качестве значений вариант в интервале принять $\bar{x}_i = (x_i + x_{i+1})/2$, $i = \overline{1, s}$.*

2. *Пронормировать СВ X, т.е. во всех интервалах перейти к величине $Z = (X - \bar{x})/\sigma_в$ и вычислить значения*

$$z_i = (x_i - \bar{x})/\sigma_в, \quad z_{i+1} = (x_{i+1} - \bar{x})/\sigma_в.$$

Левый конец первого интервала устремить к $-\infty$, а правый конец последнего – к $+\infty$.

3. *Вычислить теоретические частоты*

$$m'_i = nP_i,$$

где n – объем выборки; $P_i = \Phi(z_{i+1}) - \Phi(z_i)$ – вероятности попадания СВ X в интервалы $(x_i; x_{i+1})$; $\Phi(x)$ – функция Лапласа.

4. *Вычислить наблюдаемое значение критерия Пирсона*

$$\chi^2_H = \sum_{i=1}^{s} \frac{(m_i - m'_i)^2}{m'_i}.$$

По таблице из прил. 10 найти $\chi^2_{кр}(\alpha, k)$, где α – уровень значимости; k – число степеней свободы.

Если $\chi^2_H < \chi^2_{кр}$, то гипотеза H_0 принимается, если же $\chi^2_H > \chi^2_{кр}$ – отвергается.

Пример 2. Используя критерий Пирсона, при уровне значимости $\alpha = 0,05$ проверить, согласуется ли гипотеза о нормальном распределении генеральной совокупности X с эмпирическим распределением выборки объемом $n = 100$, приведенной в таблице:

Номер интервала	1	2	3	4	5	6	7
Интервал	[3; 8)	[8; 13)	[13; 18)	[18; 23)	[23; 28)	[28; 33)	[33; 38]
Частота m_i	6	8	15	40	16	8	7

▸ Методом произведений вычислим выборочное среднее $\bar{x}$ и выборочное среднее квадратичное отклонение $\sigma_в$. Все вычисления проведем по схеме (табл. 19.19).

Таблица 19.19

Номер интервала	Интервал	Середина интервала $\bar{x}_i$	$u_i = \dfrac{\bar{x} - 20{,}5}{5}$	Частота m_i	$m_i u_i$	$m_i u_i^2$	$m_i (u_i + 1)^2$
1	[3; 8)	5,5	−3	6	−18	54	24
2	[8; 13)	10,5	−2	8	−16	32	8
3	[13; 18)	15,5	−1	15	−15	15	0
4	[18; 23)	20,5	0	40	0	0	40
5	[23; 28)	25,5	1	16	16	16	64
6	[28; 33)	30,5	2	8	16	32	72
7	[33; 38]	35,5	3	7	21	63	112
$\sum_i$	–	–	–	100	4	212	Контроль: 320

Далее вычисляем:

$$\bar{u} = \frac{\sum m_i u_i}{n} = 0{,}04\ ,\ \bar{x} = 20{,}5 + 0{,}04 \cdot 5 = 20{,}7\ ,$$

$$D(u) = \frac{\sum m_i u_i^2}{100} - (\bar{u})^2 = 2{,}12 - 0{,}0016 = 2{,}1184\ ,$$

$$\sigma_в^2 = 2{,}1184 \cdot 25 = 52{,}96\ ,\ \sigma_в = 7{,}28\ .$$

Найдем интервалы $(z_i;\ z_{i+1})$, $i = \overline{1,\ 7}$, $z_i = (x_i - \bar{x})/\sigma_в$, учитывая, что $\bar{x} = 20{,}7$, $\sigma_в = 7{,}28$, $1/\sigma_в = 0{,}137$. С целью систематизации вычислений составим расчетную таблицу (табл. 19.20). Левый конец первого интервала устремим к $-\infty$, а правый конец последнего интервала – к $+\infty$.

Таблица 19.20

i	Границы интервала $(x_i; x_{i+1})$		$x_i - \bar{x}$	$x_{i+1} - \bar{x}$	Границы интервала $(z_i; z_{i+1})$	
	x_i	x_{i+1}			$z_i = (x_i - \bar{x})/\sigma_в$	$z_{i+1} = (x_{i+1} - \bar{x})/\sigma_в$
1	3	8	–	–12,7	–	–1,74
2	8	13	–12,7	–7,7	–1,74	–1,06
3	13	18	–7,7	–2,7	–1,06	–0,37
4	18	23	–2,7	2,3	–0,37	0,32
5	23	28	2,3	7,3	0,32	1,00
6	28	33	7,3	12,3	1,00	1,69
7	33	38	12,3	–	1,69	–

Значения теоретических вероятностей P_i определим из прил. 4 и вычислим теоретические частоты по формуле $m'_i = nP_i = 100P_i$. Результаты вычислений сведем в таблицу (табл. 19.21).

Вычислим наблюдаемое значение критерия Пирсона по формуле

$$\chi^2_H = \sum_{i=1}^{7} \frac{(m_i - m'_i)^2}{m'_i}.$$

Таблица 19.21

i	Границы интервала		$\Phi(z_i)$	$\Phi(z_{i+1})$	$P_i = \Phi(z_{i+1}) - \Phi(z_i)$	$m_i = nP_i$
	z_i	z_{i+1}				
1	–	–1,74	–5,0000	–0,4591	0,0409	4,09
2	–1,74	–1,06	–0,4591	–0,3554	0,1037	10,37
3	–1,06	–0,37	–0,3554	–0,1443	0,2111	21,11
4	–0,37	0,32	–0,1443	0,1255	0,2698	26,98
5	0,32	1,00	0,1255	0,3413	0,2158	21,58
6	1,00	1,69	0,3413	0,4545	0,1132	11,32
7	1,69	–	0,4545	0,5000	0,0455	4,55
$\sum_i$	–	–	–	–	1	100

Таблица 19.22

i	m_i	m'_i	$m_i - m'_i$	$(m_i - m'_i)^2$	$(m_i - m'_i)^2 = m'_i$
1	6	4,9	1,91	3,6481	0,8920
2	8	10,37	−2,37	5,6169	0,5416
3	15	21,11	−6,11	37,3321	1,7684
4	40	26,98	13,02	169,5204	6,2833
5	16	21,58	−5,58	31,1364	1,4428
6	8	11,32	−3,32	11,0224	0,9737
7	7	4,55	2,45	6,0025	1,3192
$\sum_i$	100	100	–	–	13,22

Последовательность вычислений указана в табл. 19.22.

Таким образом, $\chi_H^2 = 13,22$.

Из прил. 10 находим $\chi_{\text{кр}}^2$ для $\alpha = 0,05$ и числа степеней свободы $k = s - r - 1 = 7 - 2 - 1 = 4$:

$$\chi_{\text{кр}}^2(0,05;\, 4) = 9,5 .$$

Так как $\chi_H^2 > \chi_{\text{кр}}^2$, то гипотеза о нормальном распределении генеральной совокупности СВ X отвергается. ◄

Проверка гипотезы о законе распределения генеральной совокупности с помощью критерия Колмогорова. Критерий Колмогорова проверки гипотезы о виде закона распределения генеральной совокупности применяется в случае, когда гипотетически (по предположению) известны сам этот закон $F(x)$ и все его параметры, а на основании опытных данных необходимо подтверждение его справедливости. Сформулируем этот критерий.

Критерий Колмогорова. 1. *По результатам n независимых опытов найти статистическую функцию распределения $F^*(x)$.*

2. *Определить величину D критерия Колмогорова:*

$$D = \max |F^*(x) - F(x)|$$

и вычислить $\lambda_{\text{опыт}} = D\sqrt{n}$. (Величина D определяется путем сравнения $|F^*(x) - F(x)|$ в заданных точках или по графикам функций $F^*(x)$ и $F(x)$.)

3. *Принять определенный уровень значимости q критерия Колмогорова.*

4. *Зная $P(\lambda_{\text{кр}}) = 1 - q$, найти из прил. 11 соответствующее значение $\lambda_{\text{кр}}$. Если $\lambda_{\text{опыт}} < \lambda_{\text{кр}}$, то гипотеза, утверждающая, что функция распределения генеральной совокупности X равна $F(x)$, принимается, а при $\lambda_{\text{опыт}} > \lambda_{\text{кр}}$ эта гипотеза отвергается.*

Пример 3. Дана выборка объемом $n = 10$, извлеченная из генеральной совокупности X:

x_i	2	4	6	8	10	12
m_i	1	2	2	2	2	1

При уровне значимости $q = 0{,}01$ проверить с помощью критерия Колмогорова гипотезу о равномерном распределении генеральной совокупности X в интервале (2; 12).

▸ Гипотетическая функция распределения

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 2, \\ (x-2)/10 & \text{при } 2 \le x < 12, \\ 1 & \text{при } x \ge 12. \end{cases}$$

По данным выборки найдем $F^*(x)$ и $F(x)$ во всех точках x_i и оценим $|F^*(x) - F(x)|$. Результаты вычислений сведем в табл. 19.23.

Таблица 19.23

i	x_i	m_i	$F^*(x_i)$	$F(x_i)$	$\lvert F^*(x_i) - F(x_i)\rvert$
1	2	1	0,0	0	0
2	4	2	0,1	0,2	0,1
3	6	2	0,3	0,4	0,1
4	8	2	0,5	0,6	0,1
5	10	2	0,7	0,8	0,1
6	12	1	0,9	1,0	0,1

Вычисляем:

$$D = \max |F^*(x) - F(x)| = 0{,}1, \ \lambda_{\text{опыт}} = D\sqrt{n} = D\sqrt{10} \approx 0{,}3162.$$

Зная, что $P(\lambda_{\text{кр}}) = 1 - q = 0{,}99$, из прил. 11 находим: $\lambda_{\text{кр}} \approx 1{,}63$.

Так как $\lambda_{\text{опыт}} < \lambda_{\text{кр}}$, то предположение о равномерном распределении генеральной совокупности не отвергается. ◂

АЗ-19.5

1. Используя критерий Пирсона, при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ установить, случайно или значимо расхождение между эмпирическими частотами m_i и теоретическими частотами m'_i , которые вычислены исходя из гипотезы о нормальном распределении генеральной совокупности X, если:

а)

m_i	5	10	20	8	7
m'_i	6	14	18	7	5

б)

m_i	6	8	13	15	20	16	10	7	5
m'_i	5	9	14	16	18	10	9	6	7

в)

m_i	14	18	32	70	20	36	10
m'_i	10	24	34	80	18	22	12

(*Ответ:* а) $\chi^2_H = 2{,}47$, $\chi^2_{\text{кр}} = 6{,}0$; б) $\chi^2_H = 1{,}52$, $\chi^2_{\text{кр}} = 12{,}6$; в) $\chi^2_H = 13{,}93$, $\chi^2_{\text{кр}} = 9{,}5$.)

2. Используя критерий Пирсона, при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ проверить, согласуется ли гипотеза о нормальном распределении генеральной совокупности X с заданным эмпирическим распределением, если:

а)

Номер интервала	1	2	3	4	5	6	7
Интервал	[−20; −10)	[−10; 0)	[0; 10)	[10; 20)	[20; 30)	[30; 40)	[40; 50]
Частота m_i	20	47	80	89	40	16	8

(*Ответ:* $\bar{x} = 10{,}4$, $\sigma = 13{,}67$, $k = 4$, $\chi^2_H = 1{,}52$, $\chi^2_{\text{кр}} = 9{,}5$.)

б)

Номер интервала	1	2	3	4	5	6	7	8
Интервал	[6; 16)	[16; 26)	[26; 36)	[36; 46)	[46; 56)	[56; 66)	[66; 76)	[76; 86]
Частота m_i	8	7	16	35	15	8	6	5

(*Ответ:* $\bar{x} = 42{,}5$, $\sigma = 17{,}17$, $k = 5$, $\chi^2_H = 14$, $\chi^2_{\text{кр}} = 11{,}1$.)

3. Проведено $n = 100$ опытов. Любой опыт состоял из $l = 5$ испытаний, в каждом из которых вероятность p появления события A равна 0,3. В итоге получено следующее эмпирическое распределение:

x_i	0	1	2	3	4	5
m_i	2	10	27	32	23	6

где x_i – число появлений события A в каждом опыте; m_i – частота числа появлений события A в i-м опыте. Требуется при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ проверить гипотезу о том, что дискретная СВ X распределена по биномиальному закону. (*Ответ:* $\chi^2_H = 4{,}44$, $\chi^2_{\text{кр}}(0{,}05;\ 4) = 95$.)

4. Пользуясь критерием Пирсона, при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ установить, согласуется ли гипотеза о нормальном распределении генеральной совокупности с данными выборки объемом $n = 200$, если:

x_i	0,3	0,5	0,7	0,9	1,1	1,3	1,5	1,7	1,9	2,1	2,3
m_i	6	9	26	25	30	26	21	24	20	8	5

(*Ответ:* $\bar{x} = 1{,}26$, $\sigma = 0{,}491$, $\chi^2_H = 12{,}222$, $\chi^2_{\text{кр}} = 15{,}5$.)

5. В ОТК были измерены диаметры 60 валиков из партии, изготовленной одним станком-автоматом. Результаты измерений заданы следующей таблицей:

Интервал, мм	m_i	Интервал, мм	m_i
[13,94; 14,04)	1	[14,34; 14,44)	14
[14,04; 14,14)	1	[14,44; 14,54)	14
[14,14; 14,24)	4	[14,54; 14,64)	10
[14,24; 14,34)	10	[14,64; 14,74]	6

При уровне значимости $q = 0{,}05$ с помощью критерия Колмогорова проверить гипотезу о том, что выборка согласуется с равномерным распределением генеральной совокупности в интервале (13,94; 14,74). (*Ответ:* $\lambda_{\text{набл}} = 2{,}12$, $\lambda_{\text{кр}} = 1{,}355$.)

Самостоятельная работа

При уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ проверить гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности, если известны эмпирические и теоретические частоты.

1.

m_i	6	12	16	40	13	8	5
m'_i	4	11	15	43	15	6	6

(*Ответ:* $\chi^2_H = 2{,}5$, $\chi^2_{\text{кр}} = 9{,}5$.)

2.

m_i	5	6	14	32	43	39	30	20	6	5
m'_i	4	7	12	29	48	35	34	18	7	6

(*Ответ:* $\chi^2_H = 3$, $\chi^2_{\text{кр}} = 14{,}1$.)

3.

m_i	5	13	12	44	8	12	6
m'_i	2	20	12	35	15	10	6

(*Ответ:* $\chi^2_H = 13{,}0$, $\chi^2_{\text{кр}} = 9{,}5$.)

19.6. ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ДОМАШНИЕ ЗАДАНИЯ К ГЛ. 19

ИДЗ-19.1

В результате эксперимента получены данные, записанные в виде статистического ряда. Требуется:

а) записать значения результатов эксперимента в виде вариационного ряда;

б) найти размах варьирования и разбить его на 9 интервалов;

в) построить полигон частот, гистограмму относительных частот и график эмпирической функции распределения;

г) найти числовые характеристики выборки $\bar{x}$, $D_в$;

д) приняв в качестве нулевой гипотезу H_0: генеральная совокупность, из которой извлечена выборка, имеет нормальное распределение, проверить ее, пользуясь критерием Пирсона при уровне значимости $\alpha = 0,025$;

е) найти доверительные интервалы для математического ожидания и среднего квадратичного отклонения при надежности $\gamma = 0,9$.

1.1.

17,1	21,4	15,9	19,1	22,4	20,7	17,9	18,6	21,8	16,1
19,1	20,5	14,2	16,9	17,8	18,1	19,1	15,8	18,8	17,2
16,2	17,3	22,5	19,9	21,1	15,1	17,7	19,8	14,9	20,5
17,5	19,2	18,5	15,7	14,0	18,6	21,2	16,8	19,3	17,8
18,8	14,3	17,1	19,5	16,3	20,3	17,9	23,0	17,2	15,2
15,6	17,4	21,3	22,1	20,1	14,5	19,3	18,4	16,7	18,2
16,4	18,7	14,3	18,2	19,1	15,3	21,5	17,2	22,6	20,4
22,8	17,5	20,2	15,5	21,6	18,1	20,5	14,0	18,9	16,5
20,8	16,6	18,3	21,7	17,4	23,0	21,1	19,8	15,4	18,1
18,9	14,7	19,5	20,9	15,8	20,2	21,8	18,2	21,2	20,1

1.2.

16,8	17,9	21,4	14,1	19,1	18,1	15,1	18,2	20,3	16,7
19,5	18,5	22,5	18,4	16,2	18,3	19,1	21,4	14,5	16,1
21,5	14,9	18,6	20,4	15,2	18,5	17,1	22,4	20,8	19,8

17,2	19,7	16.3	18,7	14,4	18,8	19,5	21,6	15,3	17,3
22,8	17,4	22,2	16,5	21,7	15,4	21,3	14,3	20,5	16,4
20,6	15,5	19,4	17,5	20,9	23,0	18,9	15,9	18,2	20,7
17,9	21,8	14,2	21,2	16,1	18,4	17,5	19,3	22,7	19,6
22,1	17,6	16,7	20,4	15,7	18,1	16,6	18,3	15,5	17,7
19,2	14,8	19,7	17,7	16,5	17,8	18,5	14,0	21,9	16,9
15,8	20,8	17,1	20,1	22,6	18,9	15,6	21,1	20,2	15,1

1.3.

189	207	213	208	186	210	198	219	231	227
202	211	220	236	227	220	210	183	213	190
197	227	187	226	213	191	209	196	202	235
211	214	220	195	182	228	202	207	192	226
193	203	232	202	215	195	220	233	214	185
234	215	196	220	203	236	225	221	193	215
204	184	217	193	216	205	197	203	229	204
225	216	233	223	208	204	207	182	216	191
210	190	207	205	232	222	198	217	211	201
185	217	225	201	208	211	189	205	207	199

1.4.

9,4	7,9	0,3	6,8	4,2	11,9	7,8	1,7	5,1	8,8
8,7	11,1	7,7	1,8	5,5	10,5	4,3	3,8	1,4	11,2
1,1	7,3	3,7	4,4	11,8	8,6	1,9	5,6	10,1	8,4
10,0	11,6	5,2	2,1	5,7	4,8	7,4	0,8	4,7	3,6
8,3	7,6	0,7	7,3	3,4	11,4	5,7	9,9	2,2	7,2
2,3	4,7	9,7	11,3	5,8	4,9	3,3	0,5	7,5	4,6
5,0	0,4	8,9	7,1	9,6	11,5	5,9	9,0	5,3	2,4
9,5	5,9	1,0	9,1	2,5	6,0	8,2	3,2	10,9	6,1
10,2	2,6	4,5	3,1	6,2	11,7	6,3	0,2	7,0	9,2
1,2	6,4	11,9	6,9	8,1	6,5	2,9	6,2	4,4	10,3

1.5.

1,6	4,4	10,9	6,4	4,0	2,8	5,2	1,2	7,6	3,4
2,9	5,3	1,7	7,7	6,9	10,1	5,4	4,1	8,8	6,5
6,6	4,2	5,5	0,5	8,9	4,5	1,8	5,6	7,8	3,0
1,9	10,2	7,9	2,5	5,7	3,1	6,7	4,3	0,6	9,0
6,8	3,2	4,4	9,1	10,3	6,0	7,9	6,9	8,0	2,0
7,0	10,7	8,1	2,1	5,8	6,4	0,3	4,5	9,2	3,3
7,6	9,3	3,4	4,6	5,0	3,8	5,9	8,2	2,2	7,1
2,3	0,8	7,2	8,3	11,1	6,5	3,5	9,4	10,8	4,7
4,8	6,1	3,6	9,5	8,4	2,4	6,2	7,3	5,7	0,9
7,4	8,5	5,8	1,1	5,9	4,9	3,7	9,6	2,6	6,1

1.6.

20	26	32	34	26	28	22	30	17	24
30	28	18	22	24	26	34	28	22	20
34	24	28	20	32	17	22	24	26	30
30	22	26	35	28	24	30	32	28	18
20	30	17	24	32	28	22	26	24	30
34	26	24	28	22	30	35	32	20	17
28	22	36	30	20	26	28	23	24	32
20	26	30	24	32	17	22	28	35	26
28	35	32	22	26	24	26	24	30	24
18	24	26	28	35	30	26	22	26	28

1.7.

57	46	33	49	29	50	38	41	27	34
37	49	51	26	55	42	59	43	46	30
31	43	58	41	35	47	33	45	49	37
47	34	54	39	60	49	25	50	31	53
38	41	30	51	37	55	47	43	35	42
35	46	27	45	41	34	50	29	51	39
42	59	43	31	38	58	54	37	26	43
29	42	33	41	24	39	53	45	33	51
45	25	54	50	37	30	41	60	42	46
38	53	34	47	35	49	57	39	55	31

1.8.

37	49	43	31	44	38	40	31	28	43
32	44	47	29	51	25	43	38	41	32
38	24	49	40	32	34	31	28	37	46
41	35	43	25	37	46	38	24	41	50
38	29	41	32	34	49	44	37	31	47
50	34	25	37	40	32	35	28	44	43
46	37	41	35	29	43	38	31	26	34
49	32	46	26	38	35	40	51	37	46
37	25	40	34	24	44	32	28	34	38
44	34	29	47	37	49	43	35	47	50

1.9.

70	95	75	85	60	77	55	63	80	67
90	78	57	76	84	82	75	68	73	62
62	81	77	72	97	68	85	56	92	71
73	78	98	63	83	85	70	90	66	91
86	68	55	93	71	96	77	81	86	72
82	62	70	78	67	87	91	99	78	87
91	58	81	97	75	83	71	66	61	76
73	85	65	90	86	61	54	75	78	93
87	58	72	92	66	98	65	81	76	63
95	83	65	57	80	87	61	92	56	71

1.10.

57,3	75,1	78,1	69,3	60,1	77,3	66,1	69,5	72,1	68,7
81,1	69,4	63,1	67,4	77,1	82,6	64,8	72,5	62,5	80,7
77,6	65,8	78,3	57,7	80,7	64,4	82,8	67,3	83,1	70,6
75,3	58,0	60,7	81,3	67,1	69,6	82,4	62,3	66,9	80,6
62,7	73,8	68,9	83,8	57,0	72,6	65,6	78,7	59,5	70,0
73,5	58,1	64,0	83,9	84,0	63,5	74,1	77,7	68,5	80,5
66,3	73,0	79,1	71,1	80,4	62,1	66,7	83,7	76,8	59,3
71,3	63,7	71,2	78,9	65,2	77,9	74,9	69,1	70,8	74,8
71,6	72,9	61,9	71,5	75,4	71,7	59,9	74,3	76,1	70,9
61,3	71,4	71,8	65,0	67,8	75,5	71,9	64,9	74,7	62,9

1.11.

181	141	162	103	136	124	41	117	69	153
101	24	67	154	172	110	62	59	197	121
135	58	199	159	81	39	142	87	179	85
171	107	125	192	163	200	133	150	178	98
148	56	113	169	73	138	104	31	90	109
127	116	190	20	111	94	157	119	53	76
66	132	166	91	44	115	72	26	128	149
46	75	105	137	82	64	186	96	176	97
156	33	188	58	112	139	86	174	106	77
152	130	43	108	119	129	37	71	96	114

1.12.

32	105	48	80	144	128	64	112	18	81
66	129	113	17	94	78	90	51	104	34
110	149	36	103	82	53	93	130	68	150
114	84	55	131	70	38	102	77	16	135
41	19	142	61	85	159	115	57	72	101
56	100	86	146	73	40	141	25	87	126
151	71	94	15	125	76	54	99	39	140
17	124	52	98	139	37	147	88	69	109
35	158	67	30	93	123	50	138	21	97
96	121	49	137	89	145	91	65	92	33

1.13.

0,053	0,026	0,037	0,056	0,041	0,035	0,031	0,046	0,021	0,054
0,035	0,039	0,043	0,031	0,038	0,023	0,045	0,026	0,037	0,042
0,030	0,041	0,021	0,047	0,026	0,046	0,033	0,038	0,053	0,035
0,049	0,054	0,039	0,034	0,051	0,029	0,046	0,023	0,038	0,043
0,026	0,039	0,033	0,020	0,042	0,050	0,025	0,037	0,041	0,029
0,029	0,038	0,027	0,043	0,035	0,030	0,049	0,055	0,039	0,034
0,022	0,045	0,034	0,055	0,037	0,025	0,033	0,051	0,027	0,045
0,041	0,051	0,027	0,046	0,029	0,038	0,042	0,020	0,039	0,031
0,025	0,047	0,030	0,050	0,023	0,039	0,035	0,049	0,030	0,047
0,034	0,022	0,042	0,031	0,049	0,033	0,056	0,037	0,050	0,025

1.14.

0,026	0,034	0,028	0,036	0,030	0,038	0,041	0,038	0,030	0,028
0,028	0,030	0,034	0,038	0,040	0,036	0,034	0,023	0,032	0,026
0,034	0,032	0,024	0,036	0,032	0,026	0,030	0,028	0,038	0,034
0,038	0,041	0,028	0,026	0,030	0,034	0,032	0,040	0,036	0,032
0,030	0,036	0,034	0,032	0,023	0,032	0,028	0,032	0,026	0,038
0,026	0,032	0,028	0,040	0,038	0,030	0,032	0,024	0,036	0,030
0,024	0,032	0,030	0,036	0,028	0,041	0,032	0,038	0,034	0,026
0,041	0,034	0,023	0,038	0,026	0,030	0,028	0,036	0,040	0,028
0,030	0,026	0,034	0,028	0,024	0,036	0,032	0,030	0,038	0,034
0,028	0,034	0,040	0,036	0,030	0,038	0,023	0,034	0,032	0,026

1.15.

0,86	1,04	1,45	1,31	1,22	1,09	0,73	1,11	0,95	0,84
0,96	0,78	1,23	1,13	1,04	1,44	1,32	1,29	0,68	0,86
1,33	1,08	0,87	0,67	1,28	0,97	1,14	0,83	1,33	1,40
1,24	1,43	0,98	1,34	0,81	0,88	1,10	0,70	1,15	1,23
1,34	1,09	0,80	1,16	1,24	0,75	0,99	1,41	0,88	0,79
1,36	1,25	0,89	1,26	1,42	1,35	0,80	1,17	0,90	1,00
1,11	0,69	1,18	0,82	1,01	0,90	1,36	1,25	0,67	0,91
1,37	1,02	0,92	1,27	1,19	1,38	1,46	0,93	1,27	0,83
1,04	1,11	1,47	1,07	0,72	0,93	1,26	0,77	1,20	1,28
0,77	1,10	0,95	1,05	1,08	1,11	1,10	1,48	1,07	0,92

1.16.

0,76	0,82	0,70	0,86	0,78	0,96	0,68	0,83	0,92	0,86
0,86	0,84	0,66	0,92	0,76	0,95	0,84	1,91	0,78	0,70
0,78	0,70	0,82	0,99	0,83	0,86	0,67	0,91	0,75	0,86
0,83	0,75	0,95	0,79	0,65	0,84	0,78	0,88	0,70	0,95
0,87	0,71	0,92	1,00	0,75	0,87	0,80	0,79	0,66	0,90
0,79	0,82	0,65	0,83	0,88	0,96	0,75	0,91	0,71	0,87
0,76	0,90	0,71	0,87	0,74	0,94	0,80	1,00	0,95	0,79
0,96	0,98	0,84	0,79	0,91	0,71	0,65	0,90	0,88	0,74
0,74	0,67	0,94	0,72	1,01	0,82	0,80	0,83	0,99	0,83
0,88	0,80	0,72	0,91	0,84	0,74	0,94	0,72	0,83	0,87

1.17.

1,66	2,21	1,21	1,46	1,16	1,81	0,86	1,74	2,08	1,38
2,27	0,81	2,39	2,19	2,25	1,67	1,84	1,37	2,12	2,37
1,15	2,17	1,45	1,75	1,14	1,94	1,53	0,83	1,68	1,35
2,39	1,63	1,86	1,24	1,73	1,07	2,10	1,13	1,91	1,31
1,78	2,09	1,54	1,79	1,08	1,42	0,80	1,96	1,19	0,85
1,88	1,27	0,84	2,60	1,44	1,77	2,45	1,10	2,16	1,59
1,56	2,30	2,48	0,99	1,18	2,11	1,64	2,28	1,29	1,93
2,15	1,72	1,83	1,47	1,87	1,17	2,29	1,90	1,71	2,55
2,31	1,39	1,85	2,38	1,65	2,51	1,48	1,28	2,18	1,49
2,14	1,76	1,51	1,82	0,91	2,51	2,34	2,59	1,69	2,13

1.18.

2,1	2,3	1,5	3,1	2,7	1,9	2,4	0,9	2,5	1,1
1,3	2,9	2,3	3,9	2,4	3,6	1,6	3,2	2,9	2,0
2,1	3,3	0,8	3,5	1,7	2,6	4,1	2,8	1,2	2,5
1,1	2,4	1,5	3,2	2,7	1,5	3,7	1,9	3,1	4,0
4,1	2,9	2,0	2,0	1,1	0,7	3,3	2,5	1,6	2,4
2,1	3,2	0,9	2,8	4,2	2,8	1,9	1,2	1,7	3,5
2,7	3,9	2,4	1,7	3,6	2,5	0,8	3,1	2,1	1,3
3,2	1,6	0,7	2,6	1,3	2,0	3,7	2,9	4,0	3,1
2,8	4,1	1,9	3,6	3,3	2,9	0,6	1,5	1,2	2,4
1,1	3,5	1,6	2,4	3,9	2,7	2,5	1,9	2,6	3,2

1.19.

19,3	44,5	49,9	26,9	50,2	51,1	18,6	72,7	35,4	25,4
42,7	17,5	51,7	49,3	26,2	47,1	71,4	27,1	75,7	43,2
25,5	27,2	80,4	50,4	70,2	14,9	52,4	62,3	41,7	49,5
40,6	14,5	62,8	34,5	53,4	26,1	69,3	52,5	27,3	80,3
25,3	43,1	27,4	80,1	68,4	63,3	13,4	55,4	39,5	33,1
38,4	19,7	63,8	40,4	80,8	56,4	66,1	27,5	79,1	24,6
28,6	47,9	78,4	57,4	66,5	37,3	23,4	67,6	11,1	64,3
22,7	64,8	36,2	58,7	10,8	47,7	58,4	29,2	46,7	77,2
51,9	31,3	44,7	66,3	20,1	65,3	45,5	76,3	67,8	35,1
66,9	18,9	42,9	50,7	34,9	43,5	32,5	48,4	53,1	65,8

1.20.

56,5	47,3	23,1	38,6	92,5	50,9	74,9	65,7	47,5	83,9
11,8	70,1	57,1	39,9	54,7	70,9	47,4	28,1	39,1	76,2
32,3	92,1	20,7	48,6	87,1	66,3	45,8	41,4	56,9	22,6
45,8	58,4	53,4	51,4	11,6	30,9	31,4	37,4	65,8	19,3
45,3	74,4	21,2	25,7	56,7	20,3	48,3	60,1	46,2	64,1
15,1	47,7	12,7	92,6	29,5	52,0	60,2	32,1	74,5	54,2
36,1	47,2	26,1	65,3	42,0	50,1	72,1	56,4	25,1	75,1
83,8	38,7	81,2	65,1	87,4	35,3	92,4	85,6	83,5	20,5
76,3	69,4	41,6	35,9	29,7	80,9	49,9	59,5	83,4	76,5
24,4	55,9	74,2	27,3	76,7	29,9	69,1	30,1	65,4	18,4

1.21.

15,2	23,1	27,1	18,6	25,1	27,5	16,0	28,8	22,7	18,8
24,9	26,3	21,2	28,0	25,5	27,7	20,9	31,9	16,8	29,1
26,8	17,4	31,5	21,4	24,8	17,2	30,8	23,7	29,7	21,1
20,4	24,5	26,0	28,7	20,0	33,0	27,9	24,5	20,6	32,1
26,9	19,7	21,5	19,8	16,8	21,7	26,4	23,2	22,9	26,6
25,3	25,8	16,6	23,6	15,0	22,3	24,0	22,4	32,5	19,1
24,7	29,8	18,2	29,6	23,4	18,1	16,9	24,2	24,1	32,2
24,4	18,4	22,1	30,1	22,0	17,8	28,0	25,7	30,9	22,5
30,7	22,5	30,0	27,3	25,4	26,2	20,7	28,1	19,3	28,9
20,3	30,4	24,3	31,6	30,0	22,6	29,2	32,7	26,7	15,8

1.22.

19,1	23,5	19,6	27,5	33,3	31,2	27,7	21,4	27,3	20,5
21,9	20,7	15,2	27,3	23,0	31,7	18,9	23,7	33,1	27,9
23,9	18,5	24,1	28,1	22,0	16,4	30,8	27,1	19,9	30,4
20,5	30,9	31,9	26,9	19,8	28,3	22,7	15,6	22,4	18,3
28,5	16,2	22,5	18,1	28,4	33,9	30,8	19,6	26,7	32,5
21,1	24,3	26,5	15,4	24,5	26,4	28,7	17,9	30,6	23,1
32,1	23,2	17,7	28,9	22,9	20,1	30,4	26,3	16,0	25,4
26,1	15,8	30,2	19,4	25,1	25,3	17,5	24,7	21,7	29,1
21,2	21,8	17,3	33,5	29,3	24,9	30,0	15,0	25,2	25,8
33,7	24,5	25,6	23,3	29,8	17,2	25,1	22,4	29,6	19,3

1.23.

81	106	135	170	206	60	181	178	154	103
78	176	31	204	145	85	229	47	108	234
110	207	241	168	133	68	174	143	89	182
203	153	172	93	48	228	255	134	112	58
144	235	114	77	208	183	59	170	95	154
104	202	39	164	247	226	110	67	121	193
123	91	164	57	209	30	185	162	250	225
201	160	239	211	131	142	101	153	76	125
137	54	127	87	66	190	158	241	33	221
100	195	156	146	231	220	129	83	151	56

1.24.

76	28	151	91	60	204	177	102	128	217
120	66	207	126	124	152	27	221	131	51
241	77	250	134	123	147	184	195	47	160
159	74	169	178	79	129	250	223	182	96
135	199	56	25	82	116	44	229	145	203
88	209	146	224	239	103	201	245	130	163
71	165	176	194	78	154	99	78	127	69
171	173	31	181	117	84	73	161	240	149
247	107	140	53	205	155	29	132	185	179
180	128	42	114	93	191	174	210	133	226

1.25.

157,2	137,1	136,0	131,1	142,1	152,0	150,2	125,7	146,6	141,6
138,5	143,4	147,3	144,2	158,3	146,0	140,8	135,8	150,9	156,4
145,1	122,4	139,1	155,5	150,2	146,2	159,6	146,2	164,1	140,5
156,4	141,6	134,4	149,2	145,3	128,4	150,6	133,7	142,1	136,9
127,2	138,2	160,8	155,2	121,8	150,5	144,5	150,5	141,4	128,0
136,2	145,9	162,5	136,9	142,9	146,4	153,2	161,4	150,8	141,6
149,8	154,1	148,4	144,8	150,8	129,3	145,3	141,2	146,4	135,5
134,8	147,1	137,5	159,7	142,7	145,7	150,3	123,5	139,6	153,6
138,4	166,8	148,8	152,5	151,6	133,4	145,6	144,5	144,4	140,8
152,1	137,4	132,1	149,7	166,2	151,1	145,1	139,5	130,1	145,6

1.26.

2,85	5,92	3,06	2,47	6,28	3,86	2,19	5,81	3,88	3,01
3,91	3,11	1,46	4,67	3,95	5,76	3,08	3,99	6,38	1,51
2,34	4,19	5,72	4,14	3,03	4,08	6,47	4,05	5,96	4,01
4,23	2,16	6,55	3,14	4,26	4,31	1,48	4,45	2,71	5,69
6,60	4,69	2,93	7,68	0,65	6,68	3,18	5,64	4,56	3,36
2,64	3,23	6,75	4,57	5,61	3,29	7,08	2,91	4,59	2,59
4,61	1,98	6,21	3,39	4,62	2,28	4,64	3,45	5,56	4,07
3,58	4,73	3,61	2,24	4,31	3,81	5,52	4,26	4,17	7,49
1,29	4,45	4,78	5,01	7,85	5,49	2,01	4,89	0,98	4,84
2,26	5,47	4,63	4,98	5,42	4,60	5,10	4,96	4,63	5,05

1.27.

76,23	45,29	92,41	35,48	56,81	45,67	54,01	45,88	25,56	65,91
48,11	6,32	26,31	74,27	27,82	88,04	36,12	56,97	4,97	46,31
55,78	46,85	57,31	37,28	66,41	28,53	72,48	29,34	38,34	62,35
46,82	39,47	81,04	54,06	48,64	61,22	40,56	30,11	78,45	48,53
86,24	47,51	66,92	42,74	4,83	47,83	64,02	57,84	41,63	53,75
65,21	43,82	58,31	33,71	44,95	68,91	32,84	45,21	84,47	31,27
49,29	83,09	55,11	94,75	49,85	58,86	55,30	69,44	50,41	35,07
67,24	41,78	50,56	34,05	37,91	71,25	17,84	14,51	18,23	51,93
50,89	9,41	16,31	51,33	70,58	15,91	51,84	59,31	25,01	60,31
85,52	59,77	75,26	52,22	95,73	19,04	60,85	22,91	53,84	15,02

1.28.

1,58	1,95	0,89	1,76	1,54	2,18	1,13	2,59	1,91	1,60
1,19	1,70	2,58	1,31	2,54	1,90	2,20	1,49	2,69	1,51
1,77	1,93	1,48	2,21	1,64	2,92	1,25	1,97	0,90	1,78
1,12	2,48	1,38	1,79	1,75	0,67	2,22	1,62	1,82	1,09
1,61	1,71	0,95	2,23	1,46	1,99	2,24	1,72	2,03	1,25
1,28	2,04	1,83	1,69	1,81	1,22	2,05	1,07	1,74	1,88
1,80	0,69	2,07	1,29	2,27	2,75	1,41	2,08	2,30	2,15
1,34	1,84	1,73	2,31	1,86	1,40	2,46	0,73	2,33	1,85
1,02	2,13	1,66	2,84	1,16	2,34	1,44	2,89	2,09	2,90
1,87	1,43	2,11	0,84	1,91	2,44	2,10	1,75	2,60	1,68

1.29.

30,2	51,9	43,1	58,9	34,1	55,2	47,9	43,7	53,2	34,9
47,8	65,7	37,8	68,6	48,4	67,5	27,3	66,1	52,0	55,6
54,1	26,9	53,6	42,5	59,3	44,8	52,8	42,3	55,9	48,1
44,5	69,8	47,3	35,6	70,1	39,5	70,3	33,7	51,8	56,1
28,4	48,7	41,9	58,1	20,4	56,3	46,5	41,8	59,5	38,1
41,4	70,4	31,4	52,5	45,2	52,3	40,2	60,4	27,6	57,4
29,3	53,8	46,3	40,1	50,3	48,9	35,8	61,7	49,2	45,8
45,3	71,5	35,1	57,8	28,1	57,6	49,6	45,5	36,2	63,2
61,9	25,1	65,1	49,7	62,1	46,1	39,9	62,4	50,1	33,1
33,3	49,8	39,8	45,9	37,3	78,0	64,9	28,8	62,5	58,7

1.30.

88	72	100	60	116	74	36	143	114	70
56	75	30	76	89	53	117	90	135	103
35	128	71	86	43	76	61	113	34	83
62	84	50	69	120	91	102	47	119	99
33	76	91	37	85	17	85	63	121	74
46	85	63	104	77	92	54	78	42	105
85	79	49	80	93	32	106	81	64	79
73	19	80	65	107	123	51	94	80	108
52	83	124	81	96	82	109	20	95	68
66	41	82	98	111	67	125	97	112	58

Решение типового варианта

В результате эксперимента получены данные, записанные в виде статистического ряда:

44,8	46,2	45,6	44,0	46,4	45,2	46,7	45,4	45,3	46,1
44,3	45,3	45,6	46,7	44,5	46,0	45,7	45,0	46,4	45,9
44,4	45,4	46,1	43,4	46,5	45,9	43,9	45,7	47,1	44,9
43,8	45,6	45,2	46,4	44,2	46,5	45,7	44,7	46,0	45,8
44,3	45,5	46,7	44,9	46,2	46,7	44,6	46,0	45,4	45,0

45,4	45,3	44,1	46,6	44,8	45,6	43,7	46,8	45,2	46,1
44,5	45,4	45,1	46,2	44,2	46,4	45,7	43,9	47,2	45,0
43,9	45,6	44,9	44,5	46,2	46,7	44,3	46,1	47,7	45,8
45,6	45,2	44,2	46,0	44,7	46,5	43,5	45,4	47,1	44,0
46,2	44,2	45,5	46,0	45,7	46,4	44,6	47,0	45,2	46,9

Требуется:

а) записать значения результатов эксперимента в виде вариационного ряда;

б) найти размах варьирования и разбить его на 9 интервалов;

в) построить полигон частот, гистограмму относительных частот и график эмпирической функции распределения;

г) найти числовые характеристики выборки $\bar{x}$, $D_в$;

д) приняв в качестве нулевой гипотезу H_0: генеральная совокупность, из которой извлечена выборка, имеет нормальное распределение, проверить ее, пользуясь критерием Пирсона при уровне значимости $\alpha = 0,01$;

е) найти доверительные интервалы для математического ожидания и среднего квадратичного отклонения при надежности $\gamma = 0,95$.

▸ а) Располагаем значения результатов эксперимента в порядке возрастания, т.е. записываем вариационный ряд:

43,4	43,5	43,7	43,8	43,9	43,9	43,9	44,0	44,0	44,1
44,2	44,2	44,2	44,3	44,3	44,3	44,4	44,5	44,5	44,5
44,6	44,6	44,7	44,7	44,8	44,8	44,8	44,9	44,9	44,9
45,0	45,0	45,1	45,2	45,2	45,2	45,2	45,2	45,3	45,3
45,3	45,4	45,4	45,4	45,4	45,4	45,4	45,5	45,5	45,6
45,6	45,6	45,6	45,6	45,7	45,7	45,7	45,7	45,7	45,7
45,8	45,8	45,9	45,9	46,0	46,0	46,0	46,0	46,0	46,0
46,1	46,1	46,1	46,1	46,2	46,2	46,2	46,2	46,2	46,4
46,4	46,4	46,4	46,4	46,5	46,5	46,5	46,6	46,7	46,7
46,7	46,7	46,7	46,8	46,9	47,0	47,1	47,1	47,2	47,7

б) Находим размах варьирования: $\omega = x_{\max} - x_{\min} = 47,7 - 43,4 = 4,3$. По формуле $h = \omega / l$, где l – число интервалов, вычисляем длину частичного интервала $h = 4{,}3/9 = 0{,}4(7) = 0{,}48$. В качестве границы первого интервала можно выбрать значение $x_{\min}$. Тогда границы следующих частичных интервалов вычисляем по формуле $x_{\min} + dh$, $d = \overline{1, l}$. Находим середины интервалов: $x'_i = (x_i + x_{i+1})/2$. Подсчитываем число значений результатов эксперимента, попавших в каждый интервал, т.е. находим частоты интервалов n_i. Далее вычисляем относительные частоты $W_i = n_i/n$ ($n = 100$) и их плотности W_i/h. Все полученные результаты помещаем в таблицу (табл. 19.24).

Таблица 19.24

Номер частичного интервала l_i	Границы интервала $x_i - x_{i+1}$	Середина интервала $x'_i = (x_i + x_{i+1})/2$	Частота интервала n_i	Относительная частота $W_i = n_i/n$	Плотность относительной частоты W_i/h
1	43,40–43,88	43,64	4	0,04	0,083
2	43,88–44,36	44,12	12	0,12	0,25
3	44,36–44,84	44,60	11	0,11	0,23
4	44,84–45,32	45,08	14	0,14	0,29
5	45,32–45,80	45,56	21	0,21	0,44
6	45,80–46,28	46,04	17	0,17	0,35
7	46,28–46,76	46,52	14	0,14	0,29
8	46,76–47,24	47,00	6	0,06	0,13
9	47,24–47,72	47,48	1	0,01	0,02
$\sum_i$	–	–	100	–	–

в) Строим полигон частот и гистограмму относительных частот (рис. 19.3, 19.4 соответственно; масштабы на осях берем разные).

Находим значения эмпирической функции распределения $F^*(x) = n_x/n$: $F^*(43{,}40) = 0$, $F^*(43{,}88) = 0{,}04$, $F^*(44{,}36) = = 0{,}16$, $F^*(44{,}84) = 0{,}27$, $F^*(45{,}32) = 0{,}41$, $F^*(45{,}80) = = 0{,}62$, $F^*(46{,}28) = 0{,}79$, $F^*(46{,}76) = 0{,}93$, $F^*(47{,}24) = = 0{,}99$, $F^*(47{,}72) = 1$.

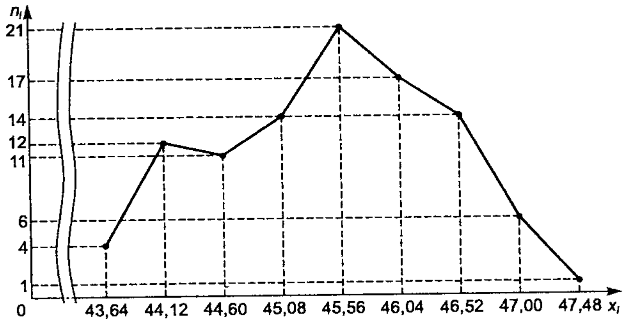


Рис. 19.3

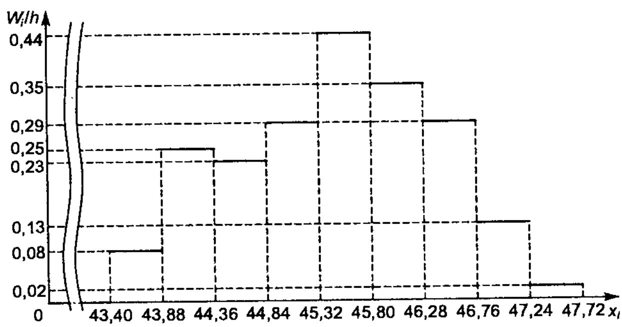


Рис. 19.4

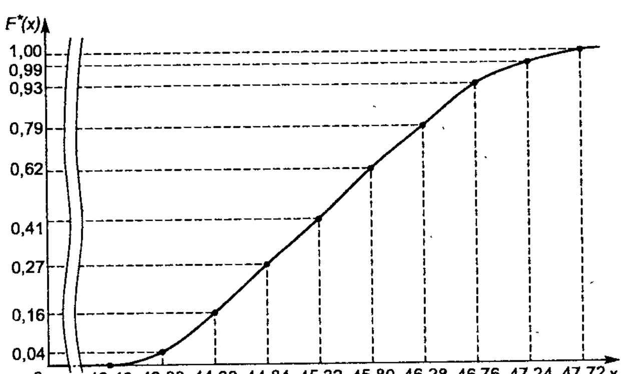


Рис. 19.5

Строим график эмпирической функции распределения (рис. 19.5).

г) Находим выборочное среднее:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x'_i n_i$$

и выборочную дисперсию:

$$D_{\text{в}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} (x'_i - \bar{x})^2 n_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} (x'_i)^2 n_i - \bar{x}^2.$$

Для этого составляем расчетную таблицу (табл. 19.25). Из нее получаем:

$$\bar{x} = 4545{,}92/100 = 45{,}46,$$

$$D_{\text{в}} = 206\,738{,}7/100 - 45{,}46^2 = 0{,}85,\ \sigma_{\text{в}} = \sqrt{D_{\text{в}}} = 0{,}92.$$

Таблица 19.25

m_i	Границы интервала x_i; x_{i+1}	Середина интервала x'_i	Частота интервала n_i	$n_i x'_i$	$(x'_i)^2$	$n_i(x'_i)^2$
1	43,40–43,88	43,64	4	174,56	1904,45	7617,80
2	43,88–44,36	44,12	12	529,44	1946,57	23 358,84
3	44,36–44,84	44,60	11	490,60	1989,16	21 880,76
4	44,84–45,32	45,08	14	631,12	2032,21	28 450,94
5	45,32–45,80	45,56	21	956,76	2075,71	43 589,91
6	45,80–46,28	46,04	17	782,68	2119,68	36 034,56
7	46,28–46,76	46,52	14	651,28	2164,11	30 297,54
8	46,76–47,24	47,00	6	282,00	2209,00	13 254,00
9	47,24–47,48	47,48	1	47,48	2254,35	2 254,35
$\sum_i$	–	–	100	4545,92	–	206 738,7

Выборочная дисперсия является *смещенной оценкой* генеральной дисперсии, а исправленная дисперсия – *несмещенной оценкой*:

$$\tilde{D}_в = \frac{n}{n-1}D_в = \frac{100}{99}\cdot 0{,}85 = 0{,}867\,,\ \tilde{\sigma}_в = \sqrt{\tilde{D}_в} = 0{,}93\,.$$

д) Согласно критерию Пирсона необходимо сравнить эмпирические и теоретические частоты. Эмпирические частоты даны. Найдем теоретические частоты. Для этого пронумеруем X, т.е. перейдем к СВ $z = (x-\bar{x})/\sigma_в$ и вычислим концы интервалов: $z_i = (x_i-\bar{x})/\sigma_в$, $z_{i+1} = (x_{i+1}-\bar{x})/\sigma_в$, причем наименьшее значение z, т.е. z_1, положим стремящимся к $-\infty$, а наибольшее, т.е. z_{m+1}, – к $+\infty$. Результаты занесем в таблицу (табл. 19.26). Так как $n_1 = 4 < 5$, то первый интервал объединяем со вторым и получаем интервал (43,40; 44,36) с частотой $n_1 = 16$. Далее объединим восьмой и девятый интервалы и получим интервал (46,76; 47,72) с частотой $n_7 = 7$.

Таблица 19.26

i	Границы интервала x_i; x_{i+1}		$x_i-\bar{x}$	$x_{i+1}+\bar{x}$	Границы интервала $(z_i; z_{i+1})$	
	x_i	x_{i+1}			$z_i = (x_i-\bar{x})/\sigma_в$	$z_{i+1} = (x_{i+1}-\bar{x})/\sigma_в$
1	43,40	44,36	–	–1,10	–	–1,19
2	44,36	44,84	–1,10	–0,62	–1,19	–0,67
3	44,84	45,32	–0,62	–0,14	–0,67	–0,15
4	45,32	45,80	–0,14	0,34	–0,15	0,37
5	45,80	46,28	0,34	0,82	0,37	0,89
6	46,28	46,76	0,82	1,30	0,89	1,40
7	46,76	47,72	1,30	–	1,40	–

Находим теоретические вероятности P_i и теоретические частоты: $n'_i = nP_i = 100P_i$. Составляем расчетную таблицу (табл. 19.27).

Таблица 19.27

i	Границы интервала $(z_i;\ z_{i+1})$		$\Phi(z_i)$	$\Phi(z_{i+1})$	$P_i = \Phi(z_{i+1}) - \Phi(z_i)$	$n'_i = 100P_i$
	z_i	z_{i+1}				
1	–	−1,19	−0,5000	−0,3830	0,1170	11,70
2	−1,19	−0,67	−0,3830	−0,2486	0,1344	13,34
3	−0,67	−0,15	−0,2486	−0,0596	0,1890	18,90
4	−0,15	0,37	−0,0596	0,1443	0,2039	20,39
5	0,37	0,89	0,1443	0,3133	0,1690	16,90
6	0,89	1,40	0,3133	0,4192	0,1059	10,59
7	1,40	–	0,4192	0,5000	0,0808	8,08
$\sum_i$	–	–	–	–	1	100

Вычислим наблюдаемое значение критерия Пирсона. Для этого составим расчетную таблицу (табл. 19.28). Последние два столбца служат для контроля вычислений по формуле

$$\chi^2_{\text{набл}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i^2 - n.$$

Таблица 19.28

i	n_i	n'_i	$n_i - n'_i$	$(n_i - n'_i)^2$	$\frac{(n_i - n'_i)^2}{n'_i}$	n_i^2	$\frac{n_i^2}{n'_i}$
1	16	11,70	4,30	18,49	1,5803	256	21,8803
2	11	13,44	−2,44	5,9536	0,4430	121	9,0030
3	14	18,90	−4,90	24,01	1,2704	196	10,3704
4	21	20,39	0,61	0,3721	0,0182	441	21,6282
5	17	16,90	0,10	0,010	0,0006	289	17,1006
6	14	10,59	3,41	11,6281	1,0980	196	18,5080
7	7	8,08	−1,08	1,1664	0,1444	49	6,0644
$\sum_i$	100	100	–	–	$\chi^2_{\text{набл}} = 4,5549$	–	104,5549

Контроль: $\dfrac{\sum n_i^2}{n'_i} - n = \dfrac{\sum (n_i - n'_i)^2}{n} = 104,5549 - 100 =$

$= 4,5549$. По таблице критических точек распределения χ^2 (см. прил. 10), уровню значимости $\alpha = 0,01$ и числу степеней свободы $k = l - 3 = 7 - 3 = 4$ (l – число интервалов) находим: $\chi^2_{\text{кр}} = 13,3$.

Так как $\chi^2_{\text{набл}} < \chi^2_{\text{кр}}$, то гипотеза H_0 о нормальном распределении генеральной совокупности принимается.

е) Если СВ X генеральной совокупности распределена нормально, то с надежностью γ можно утверждать, что математическое ожидание a СВ X покрывается доверительным интервалом $\left(\bar{x} - \dfrac{\tilde{\sigma}_{\text{в}}}{\sqrt{n}} t_\gamma;\ \bar{x} + \dfrac{\tilde{\sigma}_{\text{в}}}{\sqrt{n}} t_\gamma\right)$, где $\delta = \dfrac{\tilde{\sigma}_{\text{в}}}{\sqrt{n}} t_\gamma$ – *точность оценки*.

В нашем случае $\bar{x} = 45,46$, $\tilde{\sigma}_{\text{в}} = 0,93$, $n = 100$. Из прил. 4 для $\gamma = 0,95$ находим: $t_\gamma = 1,984$, $\delta = 0,1843$. Доверительным интервалом для a будет (45,2757; 45,6443). Доверительный интервал, покрывающий среднее квадратичное отклонение σ с заданной надежностью γ, $(\tilde{\sigma}_{\text{в}}(1 - q);\ \tilde{\sigma}_{\text{в}}(1 + q))$, где q находится по данным γ и n из прил. 9. При $\gamma = 0,95$ и $n = 100$ имеем: $q = 0,143$. Доверительным интервалом для σ будет (0,7970; 1,0630). ◂

ИДЗ-19.2

Дана таблица распределения 100 заводов по производственным средствам X (тыс. ден. ед.) и по суточной выработке Y (т). Известно, что между X и Y существует линейная корреляционная зависимость. Требуется:

а) найти уравнение прямой регрессии y на x;

б) построить уравнение эмпирической линии регрессии и случайные точки выборки (X, Y).

1.1.

X \ Y	2,2	3,6	5,0	6,4	7,8	9,2	10,6	12	m_x
200	5	3	4	–	–	–	–	–	12
360	–	7	8	–	–	–	–	–	15
520	–	–	9	10	14	–	–	–	33
680	–	–	–	8	7	6	–	–	21
840	–	–	–	–	2	3	2	–	7
1000	–	–	–	–	–	–	6	6	12
m_y	5	10	21	18	23	9	8	6	100

1.2.

X \ Y	2,3	3,8	5,3	6,8	7,3	8,8	10,3	11,8	m_x
210	–	4	3	5	–	–	–	–	12
340	–	6	7	8	–	–	–	–	21
470	–	–	10	12	11	–	–	–	33
600	–	–	–	–	5	4	3	–	12
730	–	–	–	–	–	6	8	–	14
860	–	–	–	–	–	–	3	5	8
m_y	–	10	20	25	16	10	14	5	100

1.3.

X \ Y	22,0	22,4	22,8	23,2	23,6	24,0	24,4	24,8	m_x
1,00	3	2	1	–	–	–	–	–	6
1,20	–	–	4	5	–	–	–	–	9
1,40	–	–	10	7	6	–	–	–	23
1,60	–	–	–	12	9	5	–	–	26
1,80	–	–	–	–	7	4	3	–	14
2,00	–	–	–	–	–	5	9	8	22
m_y	3	2	15	24	22	14	12	8	100

1.4.

X \ Y	21,0	21,3	21,6	21,9	22,2	22,5	22,8	23,1	m_x
0,90	1	3	2	–	–	–	–	–	6
1,05	–	4	2	3	–	–	–	–	9
1,20	–	–	5	7	6	–	–	–	18
1,35	–	–	–	6	14	9	–	–	29
1,50	–	–	–	–	7	6	7	–	20
1,65	–	–	–	–	–	6	7	5	18
m_y	1	7	9	16	27	21	14	5	100

1.5.

$X \backslash Y$	64	72	80	88	96	104	112	120	m_x
1,0	6	2	4	–	–	–	–	–	12
1,3	–	3	8	6	–	–	–	–	17
1,6	–	–	–	8	14	5	–	–	27
1,9	–	–	–	7	8	9	–	–	24
2,2	–	–	–	–	4	5	6	–	15
2,5	–	–	–	–	–	1	1	3	5
m_y	6	5	12	21	26	20	7	3	100

1.6.

$X \backslash Y$	56	68	80	92	104	116	128	140	m_x
0,9	2	3	5	–	–	–	–	–	10
1,3	–	6	3	5	–	–	–	–	14
1,7	–	–	5	8	15	–	–	–	28
2,1	–	–	–	6	9	10	–	–	25
2,5	–	–	–	–	1	6	8	–	15
2,9	–	–	–	–	–	3	4	1	8
m_y	2	9	13	19	25	19	12	1	100

1.7.

$X \backslash Y$	20	40	60	80	100	120	140	160	m_x
1000	2	7	3	–	–	–	–	–	12
2000	–	6	4	5	–	–	–	–	15
3000	–	–	8	9	7	–	–	–	24
4000	–	–	–	7	14	5	–	–	26
5000	–	–	–	–	5	7	4	–	16
6000	–	–	–	–	–	–	4	3	7
m_y	2	13	15	21	26	12	8	3	100

1.8.

$X \backslash Y$	15	30	45	60	75	90	105	120	m_x
750	2	4	2	–	–	–	–	–	8
1250	–	–	6	7	3	–	–	–	16
1750	–	–	–	6	13	9	–	–	28
2250	–	–	–	6	8	9	–	–	23
2750	–	–	–	–	7	8	1	–	16
3250	–	–	–	–	–	1	5	3	9
m_y	2	4	8	19	31	27	6	3	100

1.9.

X \ Y	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	m_x
250	3	4	5	–	–	–	–	–	12
450	–	6	2	8	–	–	–	–	16
650	–	–	–	5	14	9	–	–	28
850	–	–	–	6	8	6	–	–	20
1050	–	–	–	–	5	7	4	–	16
1250	–	–	–	–	–	–	5	3	8
m_y	3	10	7	19	27	22	9	3	100

1.10.

X \ Y	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	m_x
300	2	3	6	–	–	–	–	–	11
400	–	–	3	6	5	–	–	–	14
500	–	–	–	4	15	8	–	–	27
600	–	–	–	8	5	10	–	–	23
700	–	–	–	–	7	6	3	–	16
800	–	–	–	–	–	–	6	3	9
m_y	2	3	9	18	32	24	9	3	100

1.11.

X \ Y	160	200	240	280	320	360	400	440	m_x
11,6	1	4	5	–	–	–	–	–	10
16,6	–	6	7	2	–	–	–	–	15
21,6	–	–	5	8	6	–	–	–	19
26,6	–	–	–	9	13	6	–	–	28
31,6	–	–	–	–	7	8	4	–	19
36,6	–	–	–	–	–	–	6	3	9
m_y	1	10	17	19	26	14	10	3	100

1.12.

X \ Y	110	130	150	170	190	210	230	250	m_x
10	1	3	4	–	–	–	–	–	8
13	–	5	6	5	–	–	–	–	16
16	–	–	4	8	6	–	–	–	18
19	–	–	6	15	9	–	–	–	30
22	–	–	–	–	5	6	7	–	18
25	–	–	–	–	–	1	7	2	10
m_y	1	8	20	28	20	7	14	2	100

1.13.

X \ Y	16	18	20	22	24	26	28	30	m_x
2,3	3	2	4	–	–	–	–	–	9
2,7	–	5	6	1	–	–	–	–	12
3,1	–	–	6	9	4	–	–	–	19
3,5	–	–	–	8	16	7	–	–	31
3,9	–	–	–	–	8	6	5	–	19
4,3	–	–	–	–	–	4	5	1	10
m_y	3	7	16	18	28	17	10	1	100

1.14.

X \ Y	14	17	20	23	26	29	32	35	m_x
1,8	2	4	6	–	–	–	–	–	12
2,4	–	2	7	6	–	–	–	–	15
3,0	–	–	6	8	5	–	–	–	19
3,6	–	–	–	8	14	4	–	–	26
4,2	–	–	–	–	3	6	8	–	17
4,8	–	–	–	–	–	–	5	6	11
m_y	2	6	19	22	22	10	13	6	100

1.15.

X \ Y	1200	2700	4200	6700	8200	9700	11 200	12 700	m_x
20	4	2	5	–	–	–	–	–	11
520	–	–	7	5	2	–	–	–	14
1020	–	–	–	9	14	6	–	–	29
1520	–	–	–	7	8	6	–	–	21
2020	–	–	–	–	4	5	7	–	16
2520	–	–	–	–	–	33	2	4	9
m_y	4	2	12	21	28	20	9	4	100

1.16.

X \ Y	800	2200	3600	5000	6400	7800	9200	10 800	m_x
40	3	5	2	–	–	–	–	–	10
200	–	5	4	5	–	–	–	–	14
360	–	–	7	5	15	–	–	–	27
520	–	–	–	8	9	4	–	–	21
680	–	–	–	–	7	5	4	–	16
840	–	–	–	–	–	5	4	3	12
m_y	3	10	13	18	31	14	8	3	100

1.17.

X \ Y	12 000	12 570	13 140	13 710	14 280	14 850	15 420	15 990	m_x
1500	1	6	4	–	–	–	–	–	11
1600	–	–	4	7	5	–	–	–	16
1700	–	–	–	6	15	6	–	–	27
1800	–	–	–	8	8	4	–	–	20
1900	–	–	–	–	5	5	6	–	16
2000	–	–	–	–	–	5	2	3	10
m_y	1	6	8	21	33	20	8	3	100

1.18.

X \ Y	25 200	25 350	25 500	25 650	25 800	25 950	26 100	26 250	m_x
3150	3	4	2	–	–	–	–	–	9
3200	–	5	7	5	–	–	–	–	17
3250	–	–	–	8	14	6	–	–	28
3300	–	–	–	–	8	9	–	–	23
3350	–	–	–	–	–	5	6	3	14
3400	–	–	–	–	–	–	5	4	9
m_y	3	9	9	19	22	20	11	7	100

1.19.

X \ Y	8,0	8,8	9,6	10,4	11,2	12,0	12,8	13,6	m_x
120	5	6	–	–	–	–	–	–	11
130	–	3	4	6	–	–	–	–	13
140	–	–	4	5	6	–	–	–	15
150	–	–	–	6	13	7	–	–	26
160	–	–	–	–	–	6	9	5	20
170	–	–	–	–	–	–	7	8	15
m_y	5	9	8	17	19	13	16	13	100

1.20.

X \ Y	7,5	8,0	8,5	9,0	9,5	10,0	10,5	11,0	m_x
115	2	3	4	–	–	–	–	–	9
120	–	–	7	8	–	–	–	–	15
125	–	–	4	7	8	–	–	–	19
130	–	–	–	3	15	7	–	–	25
135	–	–	–	–	8	9	2	–	19
140	–	–	–	–	–	8	4	1	13
m_y	2	3	15	18	31	24	6	1	100

1.21.

X \ Y	300	500	700	900	1100	1300	1500	1700	m_x
5	1	2	5	–	–	–	–	–	8
10	–	2	7	4	–	–	–	–	13
15	–	–	9	6	4	–	–	–	19
20	–	–	–	14	6	7	–	–	27
25	–	–	–	–	1	8	9	–	18
30	–	–	–	–	–	4	5	6	15
m_y	1	4	21	24	11	19	14	6	100

1.22.

X \ Y	260	360	460	560	660	760	860	960	m_x
3	2	7	–	–	–	–	–	–	9
7	–	8	7	–	–	–	–	–	15
11	–	–	9	5	15	–	–	–	29
15	–	–	–	7	6	6	–	–	19
19	–	–	–	–	2	9	5	–	16
23	–	–	–	–	–	6	4	2	12
m_y	2	15	16	12	23	21	9	2	100

1.23.

X \ Y	1470	1540	1610	1680	1750	1820	1890	1960	m_x
210	3	2	3	–	–	–	–	–	8
220	–	1	4	5	–	–	–	–	10
230	–	–	7	13	8	–	–	–	28
240	–	–	–	–	9	6	6	–	21
250	–	–	–	–	–	7	8	3	18
260	–	–	–	–	–	4	6	5	15
m_y	3	3	14	18	17	17	20	8	100

1.24.

X \ Y	2400	2440	2480	2520	2560	2600	2640	2680	m_x
300	5	4	2	–	–	–	–	–	11
305	–	1	3	3	–	–	–	–	7
310	–	–	7	10	14	–	–	–	31
315	–	–	–	9	6	4	–	–	19
320	–	–	–	–	–	8	5	7	20
325	–	–	–	–	–	–	6	6	12
m_y	5	5	12	22	20	12	11	13	100

1.25.

X \ Y	120	200	280	360	440	520	600	680	m_x
10,5	4	5	2	–	–	–	–	–	11
14,5	–	6	7	5	–	–	–	–	18
18,5	–	–	6	8	14	–	–	–	28
22,5	–	–	–	–	12	9	2	–	23
26,5	–	–	–	–	6	4	–	–	10
30,5	–	–	–	–	–	5	3	2	10
m_y	4	11	15	13	32	18	5	2	100

1.26.

X \ Y	350	400	450	500	550	600	650	700	m_x
28	–	7	8	4	–	–	–	–	19
40	–	–	6	9	5	–	–	–	20
52	–	–	–	–	12	8	6	–	26
64	–	–	–	–	–	7	5	3	15
76	–	–	–	–	–	–	4	9	13
88	–	–	–	–	–	–	–	7	7
m_y	–	7	14	13	17	15	15	19	100

1.27.

X \ Y	36	56	76	96	116	136	156	176	m_x
5,4	6	4	4	–	–	–	–	–	14
7,0	–	8	7	2	–	–	–	–	17
8,6	–	–	3	8	9	–	–	–	20
10,2	–	–	–	16	5	8	–	–	29
11,8	–	–	–	–	–	6	5	–	11
13,4	–	–	–	–	–	4	3	2	9
m_y	6	12	14	26	14	18	8	2	100

1.28.

X \ Y	18,5	19,7	20,9	22,1	23,3	24,5	25,7	26,9	m_x
125	4	3	6	–	–	–	–	–	13
200	–	7	4	7	–	–	–	–	18
275	–	–	–	15	9	7	–	–	31
350	–	–	–	–	8	5	6	–	19
425	–	–	–	–	–	4	3	1	8
500	–	–	–	–	–	–	6	5	11
m_y	4	10	10	22	17	16	15	6	100

1.29.

X \ Y	5	12	19	26	33	40	47	54	m_x
0,54	5	3	2	2	–	–	–	–	12
0,68	–	4	8	9	4	–	–	–	25
0,82	–	–	–	–	17	9	6	–	32
0,96	–	–	–	–	1	6	5	–	12
1,10	–	–	–	–	–	6	3	2	11
1,24	–	–	–	–	–	–	4	4	8
m_y	5	7	10	11	22	21	18	6	100

1.30.

X \ Y	0,58	1,08	1,58	2,08	2,58	3,08	3,58	4,08	m_x
50	3	3	4	6	–	–	–	–	16
74	–	5	8	9	–	–	–	–	22
98	–	–	–	13	8	9	–	–	30
122	–	–	–	–	9	2	4	–	15
146	–	–	–	–	–	1	3	5	9
170	–	–	–	–	–	–	5	3	8
m_y	3	8	12	28	17	12	12	8	100

Решение типового варианта

Дана таблица распределения 100 автомашин по затратам на перевозки X (ден. ед.) и по протяженности маршрутов перевозок Y (км) (табл. 19.29). Известно, что между X и Y существует линейная корреляционная зависимость. Требуется:

а) найти уравнение прямой регрессии y на x;

б) построить уравнение эмпирической линии регрессии и случайные точки выборки (X, Y).

Таблица 19.29

X \ Y	4,5	6,0	7,5	9,0	10,5	12,0	13,5	15,0	m_x
60	2	4	3	10	4	–	–	–	23
90	–	–	6	14	5	–	–	–	25
120	–	–	–	–	17	5	4	–	26
150	–	–	–	–	–	8	3	2	13
180	–	–	–	–	–	4	3	1	8
210	–	–	–	–	–	2	1	2	5
m_y	2	4	9	24	26	19	11	5	100

▶ Для подсчета числовых характеристик (выборочных средних $\bar{x}$ и $\bar{y}$, выборочных средних квадратичных отклонений s_x и s_y и выборочного корреляционного момента s_{xy}) составляем расчетную таблицу (табл. 19.30). При заполнении таблицы осуществляем контроль по строкам и столбцам:

$$\sum_{i=1}^{6} m_{xi} = \sum_{j=1}^{8} m_{y_j} = n = 100 ,$$

$$\sum_{i=1}^{6} \sum_{j=1}^{8} m_{ij} x_i = \sum_{i=1}^{6} m_{x_i} x_i = 11\ 190 ,$$

$$\sum_{i=1}^{6} \sum_{j=1}^{8} m_{ij} y_j = \sum_{j=1}^{8} m_{y_j} y_j = 1042 ,$$

$$\sum_{i=1}^{6} \left(x_i \sum_{j=1}^{8} m_{ij} y_j \right) = \sum_{j=1}^{8} \left(y_j \sum_{i=1}^{6} m_{ij} x_i \right) = 124\ 245 .$$

Вычисляем выборочные средние $\bar{x}$ и $\bar{y}$, $i = \overline{1, 6}$; $j = \overline{1, 8}$:

$$\bar{x} = \frac{\sum\sum m_{ij} x_i}{n} = \frac{\sum m_{x_i} x_i}{n} = \frac{11\ 190}{100} = 111{,}9 ;$$

$$\bar{y} = \frac{\sum m_{y_j} y_j}{n} = \frac{1041}{100} = 10{,}41 .$$

Выборочные дисперсии находим по формулам:

$$s_x^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum m_{x_i} x_i^2 - \frac{1}{n} \left(\sum m_{x_i} x_i\right)^2 \right) =$$

$$= \frac{1}{99}\left(1\ 431\ 900 - \frac{1}{100} (11\ 190)^2 \right) = 13\ 118{,}58 ,$$

$$s_y^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum m_{y_j} y_j^2 - \frac{1}{n} \left(\sum m_{y_j} y_j\right)^2 \right) =$$

$$= \frac{1}{99}\left(11\ 367 - \frac{1}{100} (1041)^2 \right) = 5{,}35 .$$

Таблица 19.30

	j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
i	$X \backslash Y$	4,5	6,0	7,5	9,0	10,5	12,0	13,5	15,0	m_{x_i}	$m_{x_i}x_i$	$\sum_{j=1}^{k} m_{y_j}y_j$	$x_i^2 m_{x_i}$	$x_i \sum_{j=1}^{k} m_{ij}y_j$
1	60	2	4	3	10	4	–	–	–	23	1380	187,5	82 800	11 250
2	90	–	–	6	14	5	–	–	–	25	2250	223,5	202 500	20 115
3	120	–	–	–	–	17	5	4	–	26	3120	292,5	374 400	35 100
4	150	–	–	–	–	–	8	3	2	13	1950	166,5	292 500	24 975
5	180	–	–	–	–	–	4	3	1	8	1440	103,5	259 200	18 630
6	210	–	–	–	–	–	2	1	2	5	1050	67,5	220 500	14 175
7	m_{y_j}	2	4	9	24	26	19	11	5	100	11 190	1041	1 431 990	124 245
8	$m_{y_j}y_j$	9	24	67,5	216	273	228	148,5	75	1041	–	–	–	–
9	$\sum_{i=1}^{m} m_{ij}x_i$	120	240	720	1860	2730	2940	1680	900	11 190	–	–	–	–
10	$y_j^2 m_{ij}$	40,5	144	506,25	1944	2866,5	2736	2004,7	1125	11 367	–	–	–	–
11	$y_j \sum_{i=1}^{m} m_{ij}x_i$	540	1440	5400	16 740	28 665	35 280	22 680	3500	124 245	–	–	–	–

Корреляционный момент вычисляем по формуле

$$s_{xy} = \frac{1}{n-1}\left(\sum\sum m_{ij}x_iy_j - \frac{1}{n}\left(\sum m_{x_i}x_i\right)\left(\sum m_{y_j}y_j\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{99}\left(124\ 245 - \frac{1}{100}(11\ 190 \cdot 1041)\right) = 78{,}35 .$$

Оценкой теоретической линии регрессии является эмпирическая линия регрессии, уравнение которой имеет вид

$$y = \bar{y} + r_{xy}\,\frac{s_y}{s_x}(x - \bar{x}) ,$$

где $s_x = \sqrt{13118{,}58} \approx 114{,}53$; $s_y = \sqrt{5{,}35} \approx 2{,}31$;

$$r_{xy} = \frac{s_{xy}}{s_x s_y} = \frac{78{,}35}{114{,}53 \cdot 2{,}31} = \frac{78{,}35}{264{,}56} \approx 0{,}296 .$$

Составляем уравнение эмпирической линии регрессии y на x:

$$y = 10{,}41 + 0{,}296 \cdot \frac{2{,}31}{114{,}53}(x - 111{,}9) ,$$

$$y = 0{,}006x + 9{,}74 .$$

Строим линию регрессии и случайные точки $(x_i;\ y_j)$ (рис. 19.6). ◄

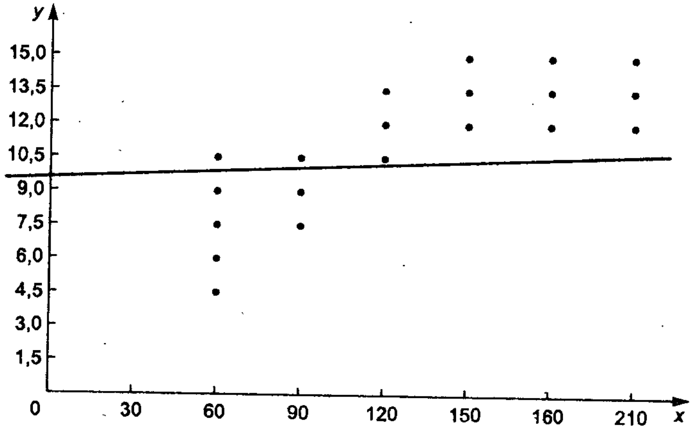


Рис. 19.6

19.7. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ К ГЛ. 19

1. Для определения среднего процента сырого белка в зернах пшеницы отобрано 626 зерен, анализ которых показал, что выборочное среднее равно 16,8, а выборочная дисперсия $s^2 = 4$. Чему равна вероятность того, что средний процент сырого белка генеральной совокупности, распределенной нормально, отличается от 16,8 по абсолютной величине не более чем на 0,2 %? (*Ответ:* 0,9876.)

2. По результатам десяти измерений определено среднее квадратичное отклонение $s = 3$ м. Оценить надежность того, что истинное значение σ_x генеральной совокупности находится в интервале (2; 4). (*Ответ:* 0,8.)

3. С целью исследования закона распределения ошибки измерения дальности с помощью радиодальномера произведено 400 измерений дальности. Результаты измерений представлены в виде статистической совокупности:

l_i, м	m_i	l_i, м	m_i	l_i, м	m_i
950–960	5	990–1000	80	1020–1030	20
960–970	35	1000–1010	60	1030–1040	10
970–980	60	1010–1020	55	1040–1050	3
980–990	72				

Определить выборочное среднее и выборочное среднее квадратичное отклонение. Построить гистограмму статистической совокупности. (*Ответ:* $\bar{x} = 994{,}2$ м, $s = 18{,}68$ м.)

4. Зависимость признака Y от признака X характеризуется следующими экспериментальными данными:

x_i	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
y_i	−5,1	−3,5	−2	−0,15	0,30	1,2	2,4	3,8	6

Методом наименьших квадратов найти коэффициенты зависимости $y = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3$. (*Ответ:* $y = 0{,}312 + 0{,}927x + 0{,}002x^2 + 0{,}029x^3$.)

5. Известно, что СВ T (время работы элемента) имеет показательное распределение $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$, $t \geq 0$. Эмпирическое распределение среднего времени работы $n = 200$ элементов имеет вид:

t_i	2,5	7,5	12,5	17,5	22,5	27,5
m_i	133	45	15	4	2	1

где t_i – время работы i-го элемента (в часах); m_i – число элементов, проработавших t_i ч. Методом моментов найти точечную оценку неизвестного параметра показательного распределения. (*Ответ:* 0,2.)

6. Записать выборочное уравнение прямой линии регрессии y на x по данным, приведенным в табл. 19.31.

Таблица 19.31

Y \ X	20	25	30	35	40	m_{y_j}
16	4	6	–	–	–	10
26	–	8	10	–	–	18
36	–	–	32	3	9	44
46	–	–	4	12	6	22
56	–	–	–	1	5	6
m_{x_i}	4	14	46	16	20	$n = 100$

(*Ответ:* $y = 1{,}45x - 10{,}36$.)

7. Измерены отклонения внутренних диаметров шестерен, обработанных на станке, от заданного размера:

Границы интервала, мк	0–5	5–10	10–15	15–20	20–25
Частота m_i	15	75	100	50	10

Проверить при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ гипотезу о согласии наблюдений с нормальным законом распределения генеральной совокупности. (*Ответ:* гипотеза не опровергается.)

8. При сверлении отверстий сверлом определенного диаметра и последовательном измерении их диаметров получена следующая таблица:

l_i, мм	m_i	l_i, мм	m_i	l_i, мм	m_i
40,24–40,26	1	40,32–40,34	15	40,38–40,40	7
40,26–40,28	4	40,34–40,36	16	40,40–40,42	5
40,28–40,30	6	40,36–40,38	12	40,42–40,44	3
40,30–40,32	11				

С помощью критерия Колмогорова проверить следующую гипотезу: выборка извлечена из нормально распределенной генеральной совокупности с математическим ожиданием и средним квадратичным отклонением, равным соответственно выборочному среднему и выборочной оценке среднего квадратичного отклонения. (*Ответ:* гипотеза согласуется.)

9. Методом моментов найти точечную оценку параметра p вероятности геометрического распределения $P(X = x_i) = (1-p)^{x_i - 1} p$, где x_i – число испытаний, проведенных до появления события; p – вероятность появления события в одном испытании. (*Ответ:* $1/\bar{x}$.)

10. Методом моментов найти по выборке $x_1, x_2, ..., x_n$ точечные оценки параметров a и b равномерного распределения, плотность которого $f(x) = 1/(b-a)$ при $a \le x \le b$ и $f(x) = 0$ при $x \notin [a;\, b]$. (*Ответ:* $a = \bar{x} - \sqrt{3D}$, $b = \bar{x} + \sqrt{3D}$.)

11. По данным 16 независимых равноточных измерений некоторой физической величины X найдены среднее значение $\bar{x} = 42{,}8$ и исправленное среднее квадратичное отклонение $s_0 = 8$. С надежностью 0,999 оценить истинное значение измеряемой величины с помощью доверительного интервала. (*Ответ:* $34{,}66 \le m_x \le 50{,}94$.)

ПРИЛОЖЕНИЯ

1. Таблица основных свойств изображений по Лапласу

№ п/п	Оригинал	Изображение	Номер формулы
1	$\sum\limits_{i=1}^{n} c_i f_i(t)$	$\sum\limits_{i=1}^{n} c_i F_i(p)$	(16.4)
2	$e^{\alpha t} f(t)$	$F(p-\alpha)$	(16.5)
3	$f(\lambda t)$	$\frac{1}{\lambda} F\left(\frac{p}{\lambda}\right)$	(16.6)
4	$f(t-t_0)$	$e^{-t_0 p} F(p)$	(16.9)
5	$f(t+t_0)$	$e^{t_0 p}\left(F(p) - \int\limits_0^{t_0} f(t) e^{-pt} dt\right)$	
6	$f(t+T) = f(t)$	$\int\limits_0^T f(t) e^{-pt} dt / (1 - e^{-pT})$	(16.14)
7	$f_1(t) * f_2(t)$	$F_1(p) \cdot F_2(p)$	(16.11)
8	$\int\limits_0^t f(\tau)\, d\tau$	$F(p)/p$	(16.12)
9	$\frac{f(t)}{t}$	$\int\limits_p^{\infty} F(z)\, dz$	(16.13)
10	$f'(t)$	$pF(p) - f(0)$	(16.8)
11	$f^{(n)}(t)$	$p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \ldots - pf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$	(16.8)
12	$f_1(t) f_2(0) + \int\limits_0^t f_1(\tau) f'_2(t-\tau)\, d\tau$	$pF_1(p) \cdot F_2(p)$	(16.17)

2. Таблица основных оригиналов $f(t)$ и их изображений по Лапласу $F(p) = \int\limits_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt$

№ п/п	Оригинал $f(t)$	Изображение $F(p)$
1	1	$\frac{1}{p}$
2	$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{p-\alpha}$
3	$\sin\beta t$	$\frac{\beta}{p^2+\beta^2}$
4	$\cos\beta t$	$\frac{p}{p^2+\beta^2}$
5	$\operatorname{sh}\beta t = \frac{e^{\beta t}-e^{-\beta t}}{2}$	$\frac{\beta}{p^2-\beta^2}$
6	$\operatorname{ch}\beta t = \frac{e^{\beta t}+e^{-\beta t}}{2}$	$\frac{p}{p^2-\beta^2}$
7	t	$\frac{1}{p^2}$
8	t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
9	$t^n e^{\alpha t}$	$\frac{n!}{(p-\alpha)^{n+1}}$
10	$e^{\alpha t}\sin\beta t$	$\frac{\beta}{(p-\alpha)^2+\beta^2}$
11	$e^{\alpha t}\cos\beta t$	$\frac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2+\beta^2}$
12	$te^{\alpha t}\sin\beta t$	$\frac{2(p-\alpha)\beta}{((p-\alpha)^2+\beta^2)^2}$

Продолжение

№ п/п	Оригинал $f(t)$	Изображение $F(p)$
13	$te^{\alpha t}\cos\beta t$	$\dfrac{(p-\alpha)^2-\beta^2}{((p-\alpha)^2+\beta^2)^2}$
14	$\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}\sin\omega t$	$\sqrt{\dfrac{\sqrt{p^2+\omega^2}-p}{p^2+\omega^2}}$
15	$\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi t}}\cos\omega t$	$\sqrt{\dfrac{\sqrt{p^2+\omega^2}+p}{p^2+\omega^2}}$
16	$\dfrac{\sin\gamma t}{t}$	$\operatorname{arctg}\dfrac{\gamma}{p}$
17	$\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}$	$\dfrac{1}{\sqrt{p}}$
18	$\dfrac{e^{\gamma t}-e^{\lambda t}}{t}$	$\ln\dfrac{p-\lambda}{p-\gamma}$
19	$\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}\sin 2\sqrt{\lambda t}$	$\dfrac{1}{p\sqrt{p}}e^{-\lambda/p}$
20	$\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}\cos 2\sqrt{\lambda t}$	$\dfrac{1}{\sqrt{p}}e^{-\lambda/p}$
21	$\ln t$	$-\dfrac{\ln p+\gamma}{p}$, γ – постоянная Эйлера: $\gamma = 0,5772157\ldots \approx 0,58$
22	$e^{\alpha t}\ln t$	$-\dfrac{\gamma+\ln(p-\alpha)}{p-\alpha}$
23	$J_0(t)$ – функция Бесселя первого рода с нулевым индексом	$\dfrac{1}{\sqrt{p^2+1}}$
24	$\delta(t)$ – функция Дирака, импульсная функция первого порядка	1

№ п/п	Оригинал $f(t)$	Изображение $F(p)$
25	$\delta(t-t_0)$	e^{-pt_0}
26	$\delta_1(t)$ – импульсная функция второго порядка	p
27	$\delta_1(t-t_0)$	pe^{-pt_0}

3. Таблица значений функции $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3652	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1609	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046

Окончание

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0001
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

4. Таблица значений функции $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-z^2/2}\,dz$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,26	0,1026	0,52	0,1985	0,78	0,2823
0,01	0,0040	0,27	0,1064	0,53	0,2019	0,79	0,2852
0,02	0,0080	0,28	0,1103	0,54	0,2054	0,80	0,2881
0,03	0,0120	0,29	0,1141	0,55	0,2088	0,81	0,2910
0,04	0,0160	0,30	0,1179	0,56	0,2123	0,82	0,2939
0,05	0,0199	0,31	0,1217	0,57	0,2157	0,83	0,2967
0,06	0,0239	0,32	0,1255	0,58	0,2190	0,84	0,2995
0,07	0,0279	0,33	0,1293	0,59	0,2224	0,85	0,3023
0,08	0,0319	0,34	0,1331	0,60	0,2257	0,86	0,3051
0,09	0,0359	0,35	0,1368	0,61	0,2291	0,87	0,3078
0,10	0,0398	0,36	0,1406	0,62	0,2324	0,88	0,3106
0,11	0,0438	0,37	0,1443	0,63	0,2357	0,89	0,3133
0,12	0,0478	0,38	0,1480	0,64	0,2389	0,90	0,3159
0,13	0,0517	0,39	0,1517	0,65	0,2422	0,91	0,3186
0,14	0,0557	0,40	0,1554	0,66	0,2454	0,92	0,3212
0,15	0,0596	0,41	0,1591	0,67	0,2486	0,93	0,3238
0,16	0,0636	0,42	0,1628	0,68	0,2517	0,94	0,3264
0,17	0,0675	0,43	0,1664	0,69	0,2549	0,95	0,3289
0,18	0,0714	0,44	0,1700	0,70	0,2580	0,96	0,3315
0,19	0,0753	0,45	0,1736	0,71	0,2611	0,97	0,3340
0,20	0,0793	0,46	0,1772	0,72	0,2642	0,98	0,3365
0,21	0,0832	0,47	0,1808	0,73	0,2673	0,99	0,3389
0,22	0,0871	0,48	0,1844	0,74	0,2703	1,00	0,3413
0,23	0,0910	0,49	0,1879	0,75	0,2734	1,01	0,3438
0,24	0,0948	0,50	0,1915	0,76	0,2764	1,02	0,3461
0,25	0,0987	0,51	0,1950	0,77	0,2794	1,03	0,3485

Окончание

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
1,04	0,3508	1,31	0,4049	1,58	0,4429	1,85	0,4678
1,05	0,3531	1,32	0,4066	1,59	0,4441	1,86	0,4686
1,06	0,3554	1,33	0,4082	1,60	0,4452	1,87	0,4693
1,07	0,3577	1,34	0,4099	1,61	0,4463	1,88	0,4699
1,08	0,3599	1,35	0,4115	1,62	0,4474	1,89	0,4706
1,09	0,3621	1,36	0,4131	1,63	0,4484	1,90	0,4713
1,10	0,3643	1,37	0,4147	1,64	0,4495	1,91	0,4719
1,11	0,3665	1,38	0,4162	1,65	0,4505	1,92	0,4726
1,12	0,3686	1,39	0,4177	1,66	0,4515	1,93	0,4732
1,13	0,3708	1,40	0,4192	1,67	0,4525	1,94	0,4738
1,14	0,3729	1,41	0,4207	1,68	0,4535	1,95	0,4744
1,15	0,3749	1,42	0,4222	1,69	0,4545	1,96	0,4750
1,16	0,3770	1,43	0,4236	1,70	0,4554	1,97	0,4756
1,17	0,3790	1,44	0,4251	1,71	0,4564	1,98	0,4761
1,18	0,3810	1,45	0,4265	1,72	0,4573	1,99	0,4767
1,19	0,3830	1,46	0,4279	1,73	0,4582	2,00	0,4772
1,20	0,3849	1,47	0,4292	1,74	0,4591	2,02	0,4783
1,21	0,3869	1,48	0,4306	1,75	0,4599	2,04	0,4793
1,22	0,3883	1,49	0,4319	1,76	0,4608	2,06	0,4803
1,23	0,3907	1,50	0,4332	1,77	0,4616	2,08	0,4812
1,24	0,3925	1,51	0,4345	1,78	0,4625	2,10	0,4821
1,25	0,3944	1,52	0,4357	1,79	0,4633	2,12	0,4830
1,26	0,3962	1,53	0,4370	1,80	0,4641	2,14	0,4838
1,27	0,3980	1,54	0,4382	1,81	0,4649	2,16	0,4846
1,28	0,3997	1,55	0,4394	1,82	0,4656	2,18	0,4854
1,29	0,4015	1,56	0,4406	1,83	0,4664	2,20	0,4861
1,30	0,4032	1,57	0,4418	1,84	0,4671	2,22	0,4868
2,24	0,4875	2,48	0,4934	2,72	0,4967	2,94	0,4984
2,26	0,4881	2,50	0,4938	2,74	0,4969	2,96	0,4985
2,28	0,4887	2,52	0,4941	2,76	0,4971	2,98	0,4986
2,30	0,4893	2,54	0,4945	2,78	0,4973	3,00	0,49865
2,32	0,4898	2,56	0,4948	2,80	0,4974	3,20	0,49931
2,34	0,4904	2,58	0,4951	2,82	0,4976	3,40	0,49966
2,36	0,4909	2,60	0,4953	2,84	0,4977	3,60	0,499841
2,38	0,4913	2,62	0,4956	2,86	0,4979	3,80	0,499928
2,40	0,4918	2,64	0,4959	2,88	0,4980	4,00	0,499968
2,42	0,4922	2,66	0,4961	2,90	0,4981	4,50	0,499997
2,44	0,4927	2,68	0,4963	2,92	0,4982	5,00	0,499997
2,46	0,4931	2,70	0,4965				

5. Таблица значений функции $\dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$

k	$\lambda = 0,1$	$\lambda = 0,2$	$\lambda = 0,3$	$\lambda = 0,4$	$\lambda = 0,5$	$\lambda = 0,6$	$\lambda = 0,7$	$\lambda = 0,8$	$\lambda = 0,9$	
0	0,9048	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488	0,4966	0,4493	0,4066	
1	0,0905	0,1637	0,2222	0,2681	0,3033	0,3293	0,3476	0,3595	0,3659	
2	0,0045	0,0164	0,0333	0,0536	0,0758	0,0988	0,1217	0,1438	0,1647	
3	0,0002	0,0011	0,0033	0,0072	0,0126	0,0198	0,0284	0,0383	0,0494	
4		0,0001	0,0003	0,0007	0,0016	0,0030	0,0050	0,0077	0,0111	
5				0,0001	0,0002	0,0004	0,0007	0,0012	0,0020	
6							0,0001	0,0002	0,0003	

k	$\lambda = 1$	$\lambda = 2$	$\lambda = 3$	$\lambda = 4$	$\lambda = 5$	$\lambda = 6$	$\lambda = 7$	$\lambda = 8$	$\lambda = 9$	$\lambda = 10$
0	0,3679	0,1353	0,0498	0,0183	0,0067	0,0025	0,0009	0,0003	0,0001	0,0000
1	0,3679	0,2707	0,1494	0,0733	0,0337	0,0149	0,0064	0,0027	0,0011	0,0005
2	0,1839	0,2707	0,2240	0,1465	0,0842	0,0446	0,0223	0,0107	0,0050	0,0023
3	0,0613	0,1804	0,2240	0,1954	0,1404	0,0892	0,0521	0,0286	0,0150	0,0076
4	0,0153	0,0902	0,1680	0,1954	0,1755	0,1339	0,0912	0,0572	0,0337	0,0189
5	0,0031	0,0361	0,1008	0,1563	0,1755	0,1606	0,1277	0,0916	0,0607	0,0378
6	0,0005	0,0120	0,0504	0,1042	0,1462	0,1606	0,1490	0,1221	0,0911	0,0631
7	0,0001	0,0034	0,0216	0,0595	0,1044	0,1377	0,1490	0,1396	0,1171	0,0901
8		0,0009	0,0081	0,0298	0,0653	0,1033	0,1304	0,1396	0,1318	0,1126
9		0,0002	0,0027	0,0132	0,0363	0,0688	0,1014	0,1241	0,1318	0,1251
10			0,0008	0,0053	0,0181	0,0413	0,0710	0,0993	0,1186	0,1251
11			0,0002	0,0019	0,0082	0,0213	0,0452	0,0722	0,0970	0,1137
12			0,0001	0,0006	0,0034	0,0126	0,0263	0,0481	0,0728	0,0948
13				0,0002	0,0013	0,0052	0,0142	0,0296	0,0504	0,0729
14				0,0001	0,0005	0,0022	0,0071	0,0169	0,0324	0,0521
15					0,0002	0,0009	0,0033	0,0090	0,0194	0,0347
16						0,0003	0,0014	0,0045	0,0109	0,0217
17						0,0001	0,0006	0,0021	0,0058	0,0128
18							0,0002	0,0009	0,0029	0,0071
19							0,0001	0,0004	0,0014	0,0037
20								0,0002	0,0006	0,0019
21								0,0001	0,0003	0,0009
22									0,0001	0,0004
23										0,0002
24										0,0001

6. Таблица значений функций e^x, e^{-x}

x	e^x	e^{-x}	x	e^x	e^{-x}
0	1,0000	1,0000	0,52	1,6820	0,5945
0,01	1,0050	0,9900	0,53	1,6989	0,5836
0,02	1,0202	0,9802	0,54	1,7160	0,5827
0,03	1,0305	0,9704	0,55	1,7333	0,5769
0,04	1,0408	0,9608	0,56	1,7507	0,5712
0,05	1,0513	0,9512	0,57	1,7683	0,5655
0,06	1,0618	0,9418	0,58	1,7860	0,5599
0,07	1,0725	0,9324	0,59	1,8040	0,5543
0,08	1,0833	0,9231	0,60	1,8221	0,5488
0,09	1,0942	0,9139	0,61	1,8404	0,5434
0,10	1,1052	0,9048	0,62	1,8589	0,5379
0,11	1,1163	0,8958	0,63	1,8776	0,5326
0,12	1,1275	0,8869	0,64	1,8965	0,5273
0,13	1,1388	0,8781	0,65	1,9155	0,5220
0,14	1,1503	0,8694	0,66	1,9348	0,5169
0,15	1,1618	0,8601	0,67	1,9542	0,5117
0,16	1,1735	0,8521	0,68	1,9739	0,5066
0,17	1,1853	0,8437	0,69	1,9937	0,5016
0,18	1,1972	0,8353	0,70	2,0138	0,4966
0,19	1,2092	0,8270	0,71	2,040	0,4916
0,20	1,2214	0,8167	0,72	2,0544	0,4868
0,21	1,2337	0,8106	0,73	2,0751	0,4819
0,22	1,2461	0,8025	0,74	2,0959	0,4771
0,23	1,2586	0,7943	0,75	2,1170	0,4724
0,24	1,2712	0,7866	0,76	2,1383	0,4677
0,25	1,2840	0,7788	0,77	2,1598	0,4630
0,26	1,2969	0,7711	0,78	2,1815	0,4584
0,27	1,3100	0,7634	0,79	2,2034	0,4538
0,28	1,3231	0,7558	0,80	2,2255	0,4493
0,29	1,3364	0,7483	0,81	2,2479	0,4449
0,30	1,3499	0,7408	0,82	2,2705	0,4404
0,31	1,3634	0,7334	0,83	2,2933	0,4360
0,32	1,3771	0,7261	0,84	2,3164	0,4317
0,33	1,3910	0,7189	0,85	2,3396	0,4274
0,34	1,4049	0,7118	0,86	2,3632	0,4232
0,35	1,4191	0,7047	0,87	2,3869	0,4190
0,36	1,4333	0,6977	0,88	2,4109	0,4148
0,37	1,4477	0,6907	0,89	2,4351	0,4107
0,38	1,4623	0,6839	0,90	2,4596	0,4066
0,39	1,4770	0,6771	0,91	2,4843	0,4025
0,40	1,4918	0,6703	0,92	2,5093	0,3985
0,41	1,5068	0,6637	0,93	2,5345	0,3946
0,42	1,5220	0,6570	0,94	2,5600	0,3906
0,43	1,5379	0,6505	0,95	2,5857	0,3867
0,44	1,5527	0,6440	0,96	2,6117	0,3829
0,45	1,5683	0,6376	0,97	2,6379	0,3791
0,46	1,5841	0,6313	0,98	2,6645	0,3753
0,47	1,6000	0,6250	0,99	2,6912	0,3716
0,48	1,6161	0,6188	1,00	2,7183	0,3679
0,49	1,6323	0,6126	1,01	2,7456	0,3642
0,50	1,6487	0,6065	1,02	2,7732	0,3606
0,51	1,6653	0,6005	1,03	2,8011	0,3570

Продолжение

x	e^x	e^{-x}	x	e^x	e^{-x}
1,04	2,8292	0,3535	1,57	4,8066	0,2080
1,05	2,8577	0,3499	1,58	4,8550	0,2060
1,06	2,8864	0,3465	1,59	4,9037	0,2039
1,07	2,9154	0,3430	1,60	4,9530	0,2019
1,08	2,9447	0,3396	1,65	5,2070	0,1920
1,09	2,9743	0,3362	1,70	5,4739	0,1827
1,10	3,0042	0,3329	1,75	5,7546	0,1738
1,11	3,0344	0,3296	1,80	6,0496	0,1653
1,12	3,0649	0,3263	1,85	6,3598	0,1572
1,13	3,0957	0,3230	1,90	6,6859	0,1496
1,14	3,1268	0,3198	1,95	7,0287	0,1423
1,15	3,1582	0,3166	2,00	7,3891	0,1353
1,16	3,1899	0,3185	2,05	7,7679	0,1287
1,17	3,2220	0,3140	2,10	8,1662	0,1226
1,18	3,2544	0,3073	2,15	8,5849	0,1165
1,19	3,2871	0,3042	2,20	9,0250	0,1108
1,20	3,3201	0,3012	2,25	9,4877	0,1054
1,21	3,3535	0,2982	2,30	9,9742	0,10026
1,22	3,3872	0,2952	2,35	10,4860	0,09537
1,23	3,4212	0,2923	2,40	11,0230	0,09072
1,24	3,4556	0,2894	2,45	11,588	0,08629
1,25	3,4903	0,2865	2,50	12,182	0,08208
1,26	3,5254	0,2837	2,55	12,807	0,07808
1,27	3,5609	0,2808	2,60	13,464	0,07427
1,28	3,5966	0,2780	2,65	14,154	0,07065
1,29	3,6328	0,2753	2,70	14,880	0,06721
1,30	3,6693	0,2725	2,75	15,643	0,06393
1,31	3,7062	0,2698	2,80	16,445	0,06081
1,32	3,7434	0,2671	2,85	17,288	0,05784
1,33	3,7810	0,2645	2,90	18,174	0,05502
1,34	3,8190	0,2618	2,95	19,106	0,05234
1,35	3,8574	0,2592	3,00	20,086	0,04979
1,36	3,8962	0,2567	3,05	21,115	0,04736
1,37	3,9354	0,2541	3,10	22,198	0,04505
1,38	3,9749	0,2516	3,15	23,336	0,04285
1,39	4,0149	0,2490	3,20	24,533	0,04076
1,40	4,0552	0,2466	3,25	25,790	0,03877
1,41	4,0960	0,2441	3,30	27,113	0,03688
1,42	4,1371	0,2417	3,35	28,503	0,03508
1,43	4,1787	0,2393	3,40	29,964	0,03337
1,44	4,2207	0,2369	3,45	31,500	0,03175
1,45	4,2631	0,2346	3,50	33,115	0,03020
1,46	4,3060	0,2322	3,55	34,813	0,02872
1,47	4,3492	0,2299	3,60	36,598	0,02732
1,48	4,3929	0,2276	3,65	38,475	0,02599
1,49	4,4371	0,2254	3,70	40,447	0,02472
1,50	4,4817	0,2231	3,75	42,521	0,02352
1,51	4,5267	0,2209	3,80	44,701	0,02237
1,52	4,5722	0,2187	3,85	46,993	0,00128
1,53	4,6182	0,2165	3,90	49,402	0,02024
1,54	4,6646	0,2144	3,95	51,935	0,01925
1,55	4,7115	0,2122	4,00	54,598	0,01832
1,56	4,7588	0,2101	4,50	90,017	0,01111

x	e^x	e^{-x}	x	e^x	e^{-x}
5,00	148,410	0,00674	8,00	2981,000	0,000335
5,50	244,690	0,00409	8,50	4914,800	0,000203
6,00	403,430	0,002479	9,00	8103,100	0,000123
6,50	665,140	0,001503	9,50	13360,000	0,000075
7,00	1096,600	0,000912	10,00	22026,000	0,000045
7,50	1808,000	0,000558			

7. Таблица значений гамма-функции $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$

x	$\Gamma(x)$	x	$\Gamma(x)$	x	$\Gamma(x)$
1,00	1,000	1,38	0,8885	1,76	0,9214
1,01	0,9943	1,39	0,8879	1,77	0,9238
1,02	0,9888	1,40	0,8873	1,78	0,9262
1,03	0,9835	1,41	0,8868	1,79	0,9288
1,04	0,9784	1,42	0,8864	1,80	0,9314
1,05	0,9735	1,43	0,8860	1,81	0,9341
1,06	0,9687	1,44	0,8858	1,82	0,9368
1,07	0,9642	1,45	0,8857	1,83	0,9397
1,08	0,9597	1,46	0,8856	1,84	0,9426
1,09	0,9555	1,47	0,8856	1,85	0,9456
1,10	0,9514	1,48	0,8857	1,86	0,9487
1,11	0,9474	1,49	0,8859	1,87	0,9518
1,12	0,9436	1,50	0,8862	1,88	0,9551
1,13	0,9399	1,51	0,8866	1,89	0,9584
1,14	0,9364	1,52	0,8870	1,90	0,9618
1,15	0,9330	1,53	0,8876	1,91	0,9652
1,16	0,9298	1,54	0,8882	1,92	0,9688
1,17	0,9267	1,55	0,8889	1,93	0,9724
1,18	0,9237	1,56	0,8896	1,94	0,9761
1,19	0,9209	1,57	0,8905	1,95	0,9799
1,20	0,9182	1,58	0,8914	1,96	0,9837
1,21	0,9156	1,59	0,8924	1,97	0,9877
1,22	0,9131	1,60	0,8935	1,98	0,9917
1,23	0,9108	1,61	0,8947	1,99	0,9958
1,24	0,9085	1,62	0,8959	2,0	1,0000
1,25	0,9064	1,63	0,8972	2,5	1,3294
1,26	0,9044	1,64	0,8986	3,0	2,0000
1,27	0,9025	1,65	0,9001	3,5	3,3233
1,28	0,9007	1,66	0,9016	4,0	6,0000
1,29	0,8990	1,67	0,9033	4,5	11,632
1,30	0,8975	1,68	0,9050	5,0	24,000
1,31	0,8960	1,69	0,9068	5,5	52,342
1,32	0,8946	1,70	0,9086	6,0	120,000
1,33	0,8934	1,71	0,9106	6,6	287,88
1,34	0,8922	1,72	0,9126	7,0	270,00
1,35	0,8912	1,73	0,9147	7,5	1871,20
1,36	0,8902	1,74	0,9168	8,0	5040,00
1,37	0,8893	1,75	0,9191		

8. Критические точки распределения Стьюдента

Число степеней свободы k	Уровень значимости α (двусторонняя критическая область)					
	0,10	0,05	0,02	0,01	0,002	0,001
1	6,31	12,7	31,82	63,7	318,3	637,0
2	2,92	4,30	6,97	9,92	22,33	31,6
3	2,35	3,18	4,54	5,84	10,22	12,9
4	2,13	2,78	3,75	4,60	7,17	8,61
5	2,01	2,57	3,37	4,03	5,89	6,86
6	1,94	2,45	3,14	3,71	5,21	5,96
7	1,89	2,36	3,00	3,50	4,79	5,40
8	1,86	2,31	2,90	3,36	4,50	5,04
9	1,83	2,26	2,82	3,25	4,30	4,78
10	1,81	2,23	2,76	3,17	4,14	4,59
11	1,80	2,20	2,72	3,11	4,03	4,44
12	1,78	2,18	2,68	3,05	3,93	4,32
13	1,77	2,16	2,65	3,01	3,85	4,22
14	1,76	2,14	2,62	2,98	3,79	4,14
15	1,75	2,13	2,60	2,95	3,73	4,07
16	1,75	2,12	2,58	2,92	3,69	4,01
17	1,74	2,11	2,57	2,90	3,65	3,96
18	1,73	2,10	2,55	2,88	3,61	3,92
19	1,73	2,09	2,54	2,86	3,58	3,88
20	1,73	2,09	2,53	2,85	3,55	3,85
21	1,72	2,08	2,52	2,83	3,53	3,82
22	1,72	2,07	2,51	2,82	3,51	3,79
23	1,71	2,07	2,50	2,81	3,49	3,77
24	1,71	2,06	2,49	2,80	3,47	3,74
25	1,71	2,06	2,49	2,79	3,45	3,72
26	1,71	2,06	2,48	2,78	3,44	3,71
27	1,71	2,05	2,47	2,77	3,42	3,69
28	1,70	2,05	2,46	2,76	3,40	3,66
29	1,70	2,05	2,46	2,76	3,40	3,66
30	1,70	2,04	2,46	2,75	3,39	3,65
40	1,68	2,02	2,42	2,70	3,31	3,55
60	1,67	2,00	2,39	2,66	3,23	3,46
120	1,66	1,98	2,36	2,62	3,17	3,37
∞	1,64	1,96	2,33	2,58	3,09	3,29
–	0,05	0,025	0,01	0,005	0,001	0,0005
–	Уровень значимости α (односторонняя критическая область)					

9. Таблица значений $q = q(\gamma, n)$

n \ γ	0,95	0,99	0,999	n \ γ	0,95	0,99	0,999
5	1,37	2,67	5,64	20	0,37	0,58	0,88
6	1,09	2,01	3,88	25	0,32	0,49	0,73
7	0,92	1,62	2,98	30	0,28	0,43	0,63
8	0,80	1,38	2,42	35	0,26	0,38	0,56
9	0,71	1,20	2,06	40	0,24	0,35	0,50
10	0,65	1,08	1,80	45	0,22	0,32	0,46
11	0,59	0,98	1,60	50	0,21	0,30	0,43
12	0,55	0,90	1,45	60	0,188	0,269	0,38
13	0,52	0,83	1,33	70	0,174	0,245	0,34
14	0,48	0,78	1,23	80	0,161	0,226	0,31
15	0,46	0,73	1,15	90	0,151	0,211	0,29
16	0,44	0,70	1,07	100	0,143	0,198	0,27
17	0,42	0,66	1,01	150	0,115	0,160	0,211
18	0,40	0,63	0,96	200	0,099	0,136	0,185
19	0,39	0,60	0,92	250	0,089	0,120	0,162

10. Критические точки распределения Пирсона χ^2

Число степеней свободы k	Уровень значимости α					
	0,01	0,025	0,05	0,95	0,975	0,89
1	6,6	5,0	3,8	0,0039	0,00098	0,00016
2	9,2	7,4	6,0	0,103	0,051	0,020
3	11,3	9,4	7,8	0,352	0,216	0,115
4	13,3	11,1	9,5	0,711	0,484	0,297
5	15,1	12,8	11,1	1,15	0,831	0,554
6	16,8	14,4	12,6	1,64	1,24	0,872
7	18,5	16,0	14,1	2,17	1,69	1,24
8	20,1	17,5	15,5	2,73	2,18	1,65
9	21,7	19,0	16,9	3,33	2,70	2,09
10	23,2	20,5	18,3	3,94	3,25	2,56
11	24,7	21,9	19,7	4,57	3,82	3,05
12	26,2	23,3	21,0	5,23	4,40	3,57
13	27,7	24,7	22,4	5,89	5,01	4,11
14	29,1	26,1	23,7	6,57	5,63	4,66
15	30,6	27,5	25,0	7,26	6,26	5,23
16	32,0	28,8	26,3	7,96	6,91	5,81
17	33,4	30,2	27,6	8,67	7,56	6,41
18	34,8	31,5	28,9	9,39	8,23	7,01
19	36,2	32,9	30,1	10,1	8,91	7,63
20	37,6	34,2	31,4	10,9	9,59	8,26
21	38,9	35,5	32,7	11,6	10,3	8,90
22	40,3	36,8	33,9	12,3	11,0	9,54
23	41,6	38,1	35,2	13,1	11,7	10,2
24	43,0	39,4	36,4	13,8	12,4	10,9
25	44,3	40,6	37,7	14,6	13,1	11,5
26	45,6	41,9	38,9	15,4	13,8	12,2
27	47,0	43,2	40,1	16,2	14,6	12,9
28	48,3	44,5	41,3	16,9	15,3	13,6
29	49,6	45,7	42,6	17,7	16,0	14,3
30	50,9	47,0	43,8	18,5	16,8	15,0

11. Таблица значений функции Колмогорова

$$P(\lambda) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k e^{-2k^2\lambda^2}$$

Уровень значимости q	0,25	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01	0,005	0,001
$P(\lambda_{\text{кр}}) = 1 - q$	0,75	0,80	0,90	0,95	0,98	0,99	0,995	0,999
$\lambda_{\text{кр}}$	1,02	1,07	1,22	1,36	1,52	1,63	1,73	1,95

12. Контрольная работа «Теория вероятностей» (2 часа)

Решить следующие задачи.

1

1.1. Из 20 билетов лотереи выигрышными являются 5. Найти вероятность того, что взятые наудачу 4 билета – выигрышные.

1.2. Из 25 билетов, пронумерованных числами от 1 до 25, наугад вынимают один. Найти вероятность того, что номер извлеченного билета есть число, не делящееся ни на 2, ни на 3, ни на 5.

1.3. За выполнение контрольной работы 24 студента получили следующие оценки: 8 студентов – «отлично», 6 – «хорошо», 6 – «удовлетворительно», 4 – «неудовлетворительно». Найти вероятность того, что работа наугад взятого студента оценена положительно.

1.4. Подбросили 3 монеты. Найти вероятность того, что хотя бы один раз выпал герб.

1.5. Шеститомное собрание сочинений расположено на полке в случайном порядке. Найти вероятность того, что два определенных тома окажутся поставленными рядом.

1.6. В урне 5 шаров: красный, желтый, синий, зеленый и белый. Случайным образом их вынимают из урны. Найти вероятность того, что они будут извлечены в следующем порядке: белый, синий, желтый, красный, зеленый.

1.7. Карточки разрезной азбуки, состоящей из 33 букв русского алфавита, тщательно перемешивают и случайным образом извлекают 7 карточек. Найти вероятность того, что буквы на карточках, разложенных в порядке извлечения, образуют слово «техника».

1.8. В автобусе 4 пассажира. Найти вероятность того, что на четырех оставшихся до конечной остановках будет выходить по одному человеку, если каждый из пассажиров с равной вероятностью может выйти на любой остановке.

1.9. Зенитная батарея, состоящая из трех орудий, ведет огонь по двум самолетам. Каждое орудие выбирает цель случайно и независимо от других. Найти вероятность того, что все орудия будут стрелять по одной и той же цели.

1.10. Из 10 деталей, находящихся в ящике, 8 стандартных. Найти вероятность того, что из 6 наугад взятых деталей 4 окажутся стандартными.

1.11. В шахматном турнире участвуют 18 человек, которых по жребию распределяют в две группы по 9 человек. Найти вероятность того, что два наиболее сильных шахматиста будут играть в разных группах.

1.12. Для проверки шести магазинов случайным образом распределяют трех ревизоров. Найти вероятность того, что каждый ревизор будет проверять два магазина.

1.13. В студенческой группе из 20 человек к практическому занятию готовы 18 человек. Преподаватель вызвал четырех студентов. Найти вероятность того, что они подготовлены к занятию.

1.14. На семи одинаковых карточках записаны следующие числа: 2, 4, 7, 8, 12, 13, 15. Наугад берут две карточки. Найти вероятность того, что образованная из двух полученных чисел дробь сократима.

1.15. В бригаде работают 10 мужчин и 6 женщин. По табельным номерам наугад отобраны 8 человек. Найти вероятность того, что среди них окажутся 2 женщины.

1.16. В лотерее 1000 билетов. На один билет падает выигрыш 100 р., на 4 билета – 50 р., на 135 билетов – по 30 р., на 100 билетов – по 10 р. и на 160 – по 5 р. Остальные билеты – без выигрыша. Найти вероятность выигрыша по одному билету не менее 10 р.

1.17. Подбросили две игральные кости. Найти вероятность того, что сумма выпавших очков кратна 2.

1.18. Даны целые числа от 11 до 19. Найти вероятность того, что квадрат наугад взятого числа оканчивается цифрой 6.

1.19. Участники жеребьевки тянут из ящика жетоны с номерами от 1 до 200. Найти вероятность того, что номер первого извлеченного жетона не содержит цифру 7.

1.20. Лифт отправляется с тремя пассажирами и останавливается на восьми этажах. Найти вероятность того, что никакие два пассажира не выйдут на одном и том же этаже.

1.21. В группе 15 студентов, среди которых 4 получают повышенную стипендию. По списку наугад отобрано 6 человек. Найти вероятность того, что трое среди них получают повышенную стипендию.

1.22. У сборщика 12 однотипных деталей. Из них 6 – первого сорта, 4 – второго, 2 – третьего. Наугад отобрано 8 деталей. Найти вероятность того, что среди отобранных деталей 4 – первого сорта, 3 — второго и одна – третьего.

1.23. Из 30 карточек с буквами алфавита наугад выбирают 3 и раскладывают их в порядке извлечения. Найти вероятность того, что эти три карточки образуют слово « мир».

1.24. В урне 24 шара, из них 18 красных и 6 черных. Наугад извлекли два шара. Найти вероятность того, что оба шара – черные.

1.25. На складе имеется 18 запасных деталей, изготовленных на заводе № 1, и 20 деталей, изготовленных на заводе № 2. Найти вероятность того, что среди 6 взятых наугад деталей все окажутся изготовленными на заводе № 2.

1.26. Из 8 книг, находящихся на полке, 6 учебников. Найти вероятность того, что взятые наугад 3 книги будут учебниками.

1.27. На шести одинаковых карточках записаны числа: 2, 4, 7, 8, 11, 12. Наугад берут две карточки. Найти вероятность того, что образованная из двух полученных чисел дробь – сократимая.

1.28. В урне 10 красных и 5 синих шаров. Найти вероятность того, что из 6 взятых наугад шаров половина красных.

1.29. 12 волейбольных команд разбиты по жребию на две равные подгруппы. Найти вероятность того, что две самые слабые команды окажутся в одной группе.

1.30. Колода из 36 карт произвольным образом делится пополам. Найти вероятность того, что в каждой половине будет по 2 туза.

2

2.1. Двое рабочих изготавливают детали. Вероятность того, что деталь, изготовленная первым рабочим, – высшего качества, равна 0,9, вторым рабочим – 0,8. У каждого рабочего взяли по две детали. Найти вероятность того, что: а) хотя бы одна деталь – высшего качества; б) не менее трех деталей – высшего качества.

2.2. На стрельбище 10 мишеней первого типа и 15 мишеней второго типа. Вероятность поражения мишени первого типа равна 0,75, а мишени второго типа – 0,9. Найти вероятность того, что: а) будет поражена наугад выбранная мишень; б) если мишень поражена, то выстрел производился по мишени второго типа.

2.3. Рабочий обслуживает 3 станка. Вероятность того, что первый станок в течение смены не потребует его внимания, равна 0,9, второй – 0,7, третий – 0,25. Найти вероятность того, что в течение смены внимания рабочего потребуют: а) хотя бы один станок; б) не более двух станков.

2.4. Два завода выпускают телевизоры. Первый из них делает 70 % все продукции, второй – 30 %, причем 90 % продукции первого завода и 85 % второго – высшего качества. а) Найти вероятность того, что наугад взятый телевизор – высшего качества. б) Выбранный наугад телевизор оказался высшего качества. Какова вероятность того, что он изготовлен на первом заводе?

2.5. По одной и той же мишени производят по одному выстрелу с дистанций в 1000, 800 и 500 м. Вероятности попадания с каждой дистанции равны соответственно 0,8; 0,7; 0,6. Найти вероятность того, что произойдет: а) хотя бы одно попадание; б) не менее двух попаданий.

2.6. В первой бригаде 5 рабочих имеют стаж работы от одного года до трех лет, 7 рабочих – от трех до пяти лет и 4 рабочих – свыше 5 лет. Во второй бригаде 6 рабочих имеют стаж от одного года до трех лет, 3 рабочих – от трех до пяти лет и 5 рабочих – свыше пяти лет. Из первой бригады во вторую переведен один рабочий. Найти вероятность того, что наугад взятый из нового состава второй бригады рабочий имеет стаж менее пяти лет.

2.7. Надежность автомобиля, собранного из высококачественных деталей, равна 0,95. Если автомобиль собирают из деталей серийного производства, его надежность равна 0,6. Высококачественные детали составляют 30 % общего числа деталей. а) Найти вероятность того, что наугад взятый автомобиль безотказно проработает в течение установленного времени. б) Автомобиль безотказно проработал в течение указанного времени. Найти вероятность того, что он собран из высококачественных деталей.

2.8. Вероятности пятилетней службы каждой из трех деталей механизма равны соответственно 0,4; 0,6; 0,8. Найти вероятность того, что пять лет прослужат: а) не менее двух деталей; б) хотя бы одна деталь.

2.9. В ящиках № 1 и № 2 лежат однородные детали двух сортов: в первом имеется 10 деталей первого и 18 деталей второго сорта, а во втором – 11 деталей первого и 13 деталей второго сорта. Из ящика № 1 переложили в ящик № 2 две детали. Найти вероятность того, что две детали, взятые после этого наугад из ящика № 1, будут первого сорта.

2.10. В группе из 20 студентов шестеро подготовлены к экзамену отлично, пятеро – хорошо, остальные – удовлетворительно. Отлично подготовленный студент может ответить на все 30 вопросов, хорошо подготовленный – на 24, удовлетворительно подготовленный – на 12. а) Найти вероятность того, что первый вызванный студент ответит на любые 2 вопроса. б) Студент ответил на 2 вопроса. Найти вероятность того, что он подготовлен удовлетворительно.

2.11. Вероятности поломок на первой, второй и третьей соединительных линиях равны соответственно 0,09; 0,07; 0,1. Найти вероятность того, что: а) хотя бы одна линия исправна; б) не более двух линий исправны.

2.12. В первой бригаде 8 рабочих имеют первый разряд, 6 рабочих – второй. Во второй бригаде 5 рабочих имеют первый разряд и 5 рабочих – второй. Из первой бригады во вторую переведены двое рабочих. Найти вероятность того, что двое рабочих, наугад взятых из нового состава второй бригады, имеют первый разряд.

2.13. Для сигнализации о том, что режим работы автоматической линии отклоняется от нормального, используется индикатор. Он принадлежит с вероятностями 0,5, 0,2 и 0,3 к одному из трех типов. Для каждого типа индикатора вероятности подачи сигнала при нарушении нормальной работы линии равны соответственно 0,9; 0,8; 0,6. а) Найти вероятность получения сигнала от индикатора. б) От индикатора получен сигнал. Найти вероятность того, что индикатор – первого типа.

2.14. Стрелок произвел 3 выстрела по удаляющейся от него мишени, причем вероятность попадания в цель в начале стрельбы равна 0,9, а после каждого выстрела уменьшается на 0,2. Найти вероятность попадания в мишень: а) хотя бы один раз; б) не менее двух раз.

2.15. В первом цехе 2 станка были к эксплуатации пять лет, 3 станка – четыре года и 5 станков – менее трех лет. Во втором цехе 3 станка проработали пять лет, 3 станка – четыре года и 6 станков – менее трех лет. После реконструкции один из станков цеха № 2 оказался в цехе № 1. Найти вероятность того, что каждый из двух станков, выбранных наугад в цехе № 1 после реконструкции, проработал не менее трех лет.

2.16. Вероятности подключения абонента к каждой из трех АТС равны соответственно 0,2; 0,4; 0,4. Вероятность соединения абонентов в случае подключения для первой АТС – 0,25, для второй – 0,4, для третьей – 0,35. а) Найти вероятность соединения абонентов.

б) Соединение произошло. Найти вероятность того, что подключилась третья АТС.

2.17. Экзаменационный билет содержит три вопроса. Вероятность того, что студент ответит на первый вопрос, равна 0,9, на второй – 0,85, на третий – 0,8. Найти вероятность того, что студент ответит: а) хотя бы на два вопроса; б) не менее чем на два вопроса.

2.18. В отделе A института работают 5 инженеров и 3 старших инженера, а в отделе B – 8 инженеров и 2 старших инженера. Из отдела A в отдел B перевели одного сотрудника. Найти вероятность того, что 3 сотрудника, наугад выбранных из нового состава отдела A, являются старшими инженерами.

2.19. На конвейер поступают одинаковые детали со станков A и B. Вероятность брака для станка A равна 0,06, для станка B – 0,02. Со станка A поступает в 4 раза больше деталей, чем со станка B. а) Найти вероятность того, что взятая наугад деталь будет стандартной. б) Взятая наугад деталь оказалась стандартной. Найти вероятность того, что она поступила со станка A.

2.20. В первой коробке из 10 деталей 3 бракованные, а во второй из 14 – 5 бракованных. Из второй коробки в первую переложили две детали. Найти вероятность того, что две детали, взятые после этого наугад из первой коробки, будут бракованными.

2.21. Вероятность повреждения изделия при погрузке на автомашину равна 0,04, при транспортировке на машине – 0,02, а при разгрузке – 0,01. Найти вероятность доставки изделия: а) с повреждением хотя бы по одной из указанных причин; б) с повреждением вследствие двух причин.

2.22. Вероятность повреждения электролинии на участке C_1 протяженностью 8 км равна 0,3, на участке C_2 протяженностью 11 км – 0,2, на участке C_3 протяженностью 6 км – 0,15. а) Найти вероятность повреждения электролинии. б) Произошло повреждение электролинии. Найти вероятность того, что это повреждение – на участке C_3.

2.23. В первой бригаде токарей 2 рабочих имеют первый разряд, 2 рабочих – второй и 5 рабочих – четвертый. Во второй бригаде один токарь имеет первый разряд, 4 токаря – третий и 2 токаря – четвертый. Из первой бригады во вторую переведен один токарь. Найти вероятность того, что рабочий, наугад выбранный из нового состава второй бригады, имеет разряд не ниже второго.

2.24. Три электрические лампочки, две из которых соединены параллельно, а третья с первыми двумя – последовательно, включены в цепь. Вероятность того, что любая лампочка перегорит, если напряжение в сети превысит номинальное, равна 0,5. Найти вероятность того, что при повышении напряжения: а) перегорит не менее двух лампочек; б) перегорит хотя бы одна лампочка.

2.25. Имеется три одинаковые урны, в первой из которых 5 зеленых и 3 синих шара, во второй – 2 зеленых и 4 синих, в третьей – 1 зеленый и 3 синих. а) Найти вероятность того, что шар, взятый из наугад выбранной урны, будет зеленым. б) Наугад взятый шар оказался зеленым. Найти вероятность того, что он из первой урны.

2.26. Из 20 радиоламп первой партии 12 имеют срок годности от десяти месяцев до года, 5 – от года до полутора лет, а остальные – от полутора до двух лет. Во второй партии из 18 радиоламп 10 имеют срок годности от десяти месяцев до года, 5 – от года до полутора лет и остальные – от полутора до двух лет. Из первой партии во вторую переложена одна лампа. Найти вероятность того, что две лампы, наугад взятые после этого из первой партии, имеют срок годности свыше года.

2.27. Из трех орудий произвели залп по цели. Вероятность попадания в цель из первого орудия равна 0,7, из второго – 0,9 и из третьего – 0,8. Найти вероятность того, что: а) хотя бы один снаряд попадет в цель; б) не менее двух снарядов попадут в цель.

2.28. Двадцать пять экзаменационных билетов содержат по два неповторяющихся вопроса. Студент может ответить только на 40 вопросов. а) Найти вероятность того, что экзамен будет сдан, если для этого достаточно ответить на два вопроса из одного билета или на один вопрос из одного билета и на дополнительный вопрос из другого билета. б) Студент сдал экзамен. Найти вероятность того, что он ответил на оба вопроса билета.

2.29. В первой лаборатории 2 лаборанта имеют стаж работы свыше десяти лет, 4 лаборанта – от пяти до десяти лет и 4 лаборанта – менее пяти лет. Во второй лаборатории один лаборант имеет стаж менее пяти лет, 4 лаборанта – от пяти до десяти лет и 3 лаборанта – свыше десяти лет. Из первой лаборатории во вторую переведен один лаборант. Найти вероятность того, что лаборант, наугад выбранный из нового состава второй лаборатории, имеет стаж не менее пяти лет.

2.30. В одном из цехов завода имеется 3 телефона. Вероятности занятости каждого из них равны соответственно 0,2; 0,1; 0,3. Найти вероятность того, что: а) хотя бы один из телефонов свободен; б) не менее двух телефонов заняты.

3.1. Среди вырабатываемых рабочим деталей в среднем 3 % бракованных. Найти вероятность того, что среди взятых наугад шести деталей: а) три бракованные; б) не более трех бракованных.

3.2. Вероятность поражения мишени при каждом выстреле равна 0,9. Найти вероятность того, что при 5 выстрелах мишень будет поражена.

3.3. На каждые 25 приборов приходится в среднем 5 неточных. Определить наивероятнейшее число точных приборов из наугад взятых шести приборов.

3.4. Машина-экзаменатор содержит 12 вопросов, на каждый из которых предлагается 4 варианта ответов. Положительная оценка выставляется машиной в том случае, если экзаменуемый правильно ответит не менее чем на 10 вопросов. Найти вероятность того, что студент, выбирая ответы наугад: а) ответит на 10 вопросов; б) получит положительную оценку.

3.5. В данной партии хлопка имеется 20 % коротких волокон. Найти вероятность того, что в наугад взятом пучке из шести волокон окажется не более трех коротких.

3.6. Сколько раз следует стрелять из орудия, чтобы при вероятности попадания, равной 0,9, наивероятнейшее число попаданий оказалось равным 17?

3.7. Вероятность ежедневного нормального расходования воды в городе принимается равной 0,8. Найти: а) наиболее вероятное число дней в течение недели, в которые расход воды будет нормальным; б) вероятность того, что два дня в неделю расход воды будет нормальным.

3.8. Сколько скважин необходимо пробурить в нефтеносном районе, чтобы вероятность открыть хотя бы одно месторождение была не меньше 0,6, если вероятность вскрытия одной нефтеносной скважины равна 0,03? Какова вероятность того, что из 5 пробуренных скважин две нефтеносные?

3.9. Вероятность поломки станка в течение одной смены равна 0,3. Определить вероятность поломки станка: а) в течение каждой из трех смен; б) в течение одной из трех смен.

3.10. Найти наивероятнейшее число появлений некоторого события при 16 испытаниях, если вероятность появления его в отдельном испытании равна 0,7.

3.11. Вероятность изготовления первосортной детали на некотором станке равна 0,75. Сколько необходимо изготовить деталей, чтобы наивероятнейшее число первосортных деталей было равно 21? Какова вероятность того, что из 5 изготовленных деталей 3 первосортные?

3.12. Вероятность хотя бы одного попадания в цель при двух выстрелах равна 0,91. Найти вероятность: а) трех попаданий при шести выстрелах; б) не менее двух попаданий при четырех выстрелах.

3.13. Сколько изюма должны содержать в среднем сдобные булочки, чтобы вероятность попадания хотя бы одной изюминки в булку была не менее 0,99?

3.14. Монету подбрасывают 20 раз. Найти наивероятнейшее число выпадения герба.

3.15. Батарея сделала 14 выстрелов по военному объекту, вероятность попадания в который равна 0,2. Найти: а) наивероятнейшее число попаданий; б) вероятность разрушения объекта, если для этого требуется не менее четырех попаданий.

3.16. Вероятность того, что хотя бы одна деталь из четырех будет стандартной, равна 0,9999. Найти вероятность того, что из 5 деталей: а) две бракованные; б) менее двух стандартных.

3.17. Вероятность того, что расход электроэнергии за сутки не превышает нормы, равна 0,8. Найти вероятность того, что в ближайшие 7 суток расход электроэнергии не превысит нормы: а) за 4 суток; б) не менее чем за 5 суток.

3.18. В бригаде 9 человек. Вероятность невыхода на работу в случае болезни равна 0,1. Найти наиболее вероятное число работающих и вычислить соответствующую этому числу вероятность.

3.19. Вероятность нормального расхода горючего в автоколонне составляет 0,8. а) Определить вероятность того, что в ближайшие 7 дней расход горючего будет нормальным. б) Найти наиболее вероятное число дней в течение недели, в которые расход горючего будет нормальным.

3.20. Вероятность попадания в цель равна 0,5. Сбрасывают по одной 5 бомб. Определить вероятность того, что будет: а) не менее одного попадания в цель; б) два попадания.

3.21. Завод выпускает 75 % продукции первого сорта. Найти: а) наиболее вероятное число изделий первого сорта среди 6 отобранных; б) вероятность того, что не менее трех изделий – первого сорта.

3.22. Сколько нужно взять деталей, чтобы с вероятностью 0,721 можно было утверждать, что среди них не окажется бракованных, если вероятность брака равна 0,01? Для найденного количества деталей вычислить вероятность того, что две детали будут бракованными.

3.23. Сколько раз следует выстрелить из орудия, чтобы при вероятности попадания, равной 0,9, наивероятнейшее число попаданий оказалось равным 10? Определить вероятность пяти попаданий при найденном числе выстрелов.

3.24. Отделом технического контроля установлено, что из 100 велосипедов, изготовленных заводом, 10 с дефектом. Найти вероятность того, что из 6 выбранных велосипедов будет: а) 3 с дефектом; б) 5 удовлетворяющих требованиям качества.

3.25. Вероятность хотя бы одного попадания в цель при трех выстрелах равна 0,992. Найти вероятность четырех попаданий при пяти выстрелах.

3.26. Вероятность выигрыша по одному билету лотереи равна 1/7. Найти вероятность того, что, имея 5 лотерейных билетов, можно выиграть: а) хотя бы по одному билету; б) по четырем билетам.

3.27. Вероятность того, что наугад взятый рабочий бригады выполнит норму выработки, равна 0,9. Найти: а) вероятность того, что по крайней мере двое из пяти рабочих, входящих в бригаду, выполнят норму выработки; б) наиболее вероятное число рабочих, выполняющих норму выработки.

3.28. Для разрушения военного объекта необходимо не менее трех попаданий в него. По объекту произведено 15 выстрелов. Найти вероятность разрушения объекта, если вероятность попадания в него при каждом выстреле постоянна и равна 0,4.

3.29. Изготовлена партия в 20 деталей. Вероятность изготовления детали, требующей дополнительной доводки, равна 0,1. Найти наивероятнейшее число стандартных деталей в данной партии и вероятность этого наивероятнейшего числа.

3.30. Ожидается прибытие трех судов с овощами и фруктами. Статистика показывает, что в 1 % случаев груз овощей и фруктов частично портится в дороге. Найти вероятность того, что: а) только одно судно придет с частично испорченным грузом; б) все три судна придут с неиспорченным грузом.

4. Для данной СВ X: а) описать пространство элементарных исходов Ω; б) вычислить $P(X=\omega_i)$, $\omega_i \in \Omega$; в) записать ряд ее распределения; г) вычислить математическое ожидание $M(X)$, дисперсию $D(X)$; д) найти функцию распределения.

4.1. Вероятность того, что в библиотеке имеется необходимая студенту книга, равна 0,4. В городе 5 библиотек; СВ X – число библиотек, которые посетит студент.

4.2. Имеется 4 ключа, из которых только один подходит к замку; СВ X – число попыток открыть замок каждым ключом при условии, что опробованный ключ в последующих попытках не участвует.

4.3. Среди шести изделий имеется одно бракованное. Чтобы его обнаружить, отбирают наугад одно изделие за другим и каждое выбранное изделие проверяют; СВ X – число проверенных изделий.

4.4. В озере 3000 рыб, причем 2000 из них – меченые. Выловили 7 рыб; СВ X – число меченых рыб среди выловленных.

4.5. Батарея состоит из трех орудий. Вероятности попадания в цель при одном выстреле из первого, второго и третьего орудий батареи равны соответственно 0,6, 0,8 и 0,7. Каждое орудие стреляет по некоторой цели один раз; СВ X – число попаданий в цель.

4.6. Охотник, имеющий 6 патронов, стреляет в цель до первого попадания. Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,5; СВ X – число израсходованных патронов.

4.7. Испытуемый прибор состоит из четырех элементов. Вероятности отказа элементов равны соответственно 0,2; 0,3; 0,4; 0,5. Отказы элементов независимы; СВ X – число отказавших элементов.

4.8. Вероятность попадания мячом в корзину при одном броске равна 0,4; СВ X – число попаданий при трех бросках.

4.9. В шестиламповом радиоприемнике, где все лампы различны, перегорела одна лампа. С целью устранения неисправности наугад выбранную лампу заменяют заведомо годной из запасного комплекта, после чего сразу проверяют работу приемника; СВ X – число замен ламп.

4.10. Рабочий обслуживает 4 станка. Вероятности того, что первый, второй, третий и четвертый станки не потребуют внимания рабочего в течение часа, равны соответственно 0,6; 0,9; 0,65; 0,8; СВ X – число станков, которые не потребуют внимания рабочего в течение часа.

4.11. В партии хлопка 15 % коротких волокон; СВ X – число коротких волокон среди случайно отобранных четырех волокон.

4.12. Охотник стреляет по дичи до первого попадания, но успевает сделать не более четырех выстрелов. Вероятность попадания при одном выстреле равна 0,6; СВ X – число выстрелов, производимых охотником.

4.13. В группе из десяти изделий два бракованных. Чтобы их обнаружить, отбирают наугад одно изделие за другим и каждое выбранное изделие проверяют; СВ X – число проверенных изделий.

4.14. Имеется 5 ключей, из которых только один подходит к замку; СВ X – число попыток открыть замок каждым ключом при условии, что опробованный ключ в последующих попытках не участвует.

4.15. Вероятность поражения цели при одном выстреле равна 0,6; СВ X – число выстрелов, производимых до первого поражения цели.

4.16. Проводятся последовательные испытания десяти приборов на надежность. Каждый следующий прибор испытывается в том случае, если предыдущий оказался надежным. Вероятность выдержать испытание для каждого прибора равна 0,7; СВ X – число испытаний, на котором заканчивается проверка.

4.17. Из ящика, содержащего 2 бракованные и 6 стандартных деталей, наугад извлекают 3 детали; СВ X – число извлеченных стандартных деталей.

4.18. На пути движения автомашины 4 светофора, разрешающих либо запрещающих дальнейшее ее движение с вероятностью 0,5;

СВ X – число светофоров, мимо которых автомашина прошла до первой остановки.

4.19. Вероятность наступления некоторого события в каждом испытании постоянна и равна 0,2. Испытания проводятся 5 раз; СВ X – число появлений события в пяти испытаниях.

4.20. Вероятность попадания в цель при одном выстреле из орудия равна 0,6. Производится 5 выстрелов; СВ X – число попаданий в цель.

4.21. Партия из 40 изделий содержит 8 бракованных. Из нее случайным образом отобрано 4 изделия; СВ X – число бракованных изделий, содержащихся в случайной выборке.

4.22. Вероятность выпуска нестандартного изделия равна 0,2. Из партии изделий контролер берет одно и проверяет его качество. Если изделие оказывается нестандартным, дальнейшие испытания прекращаются, а партия задерживается. Если же изделие оказывается стандартным, контролер берет следующее и т.д. Всего он проверяет не более четырех изделий; СВ X – число проверяемых изделий.

4.23. Вероятность попадания в движущуюся цель при одном выстреле постоянна и равна 0,1. Произведено 4 выстрела; СВ X – число попаданий в движущуюся цель.

4.24. В лотерее на 2000 билетов разыгрываются три вещи, стоимость которых 420, 120 и 60 у.е.; СВ X – сумма выигрыша для лица, имеющего один билет.

4.25. В некотором цехе брак составляет 6 % всех изделий; СВ X – число бракованных изделий из пяти наугад взятых.

4.26. Снайпер стреляет по замаскированному противнику до первого попадания. Вероятность промаха при отдельном выстреле равна 0,3; СВ X – число промахов, если у снайпера в запасе четыре патрона.

4.27. Вероятность промышленного содержания металла в каждой пробе одинакова и равна 0,8. Произведено 4 пробы; СВ X – число проб с промышленным содержанием металла из четырех проверенных.

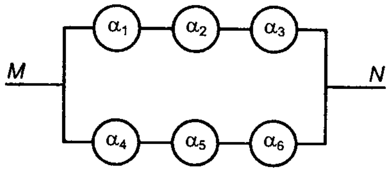
4.28. При штамповке металлических клемм для соединительных пластин бывает в среднем 5 % брака; СВ X – число бракованных клемм из четырех проверяемых.

4.29. Вероятность положительного результата при химическом анализе равна 0,8; СВ X – число положительных результатов химического анализа среди пяти проведенных.

4.30. При автоматической прессовке заготовок 2/3 от общего их числа не имеют зазубрин; СВ X – число заготовок из трех, не имеющих зазубрин.

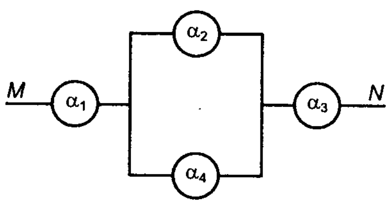
5. Участок электрической цепи MN состоит из элементов, соединенных по указанной схеме. Выход из строя за время T различных элементов системы — независимые события, имеющие вероятности, приведенные в таблице. Вычислить вероятность отказа системы за указанный промежуток времени.

5.1.



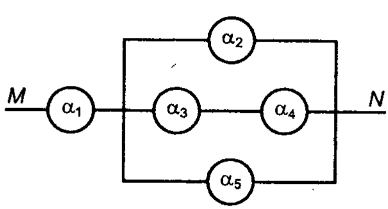
α_i	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6
p_i	0,2	0,3	0,6	0,4	0,1	0,5

5.2.



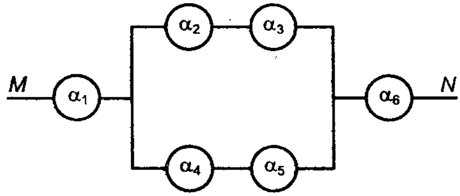
α_i	α_1	α_2	α_3	α_4
p_i	0,3	0,2	0,1	0,4

5.3.



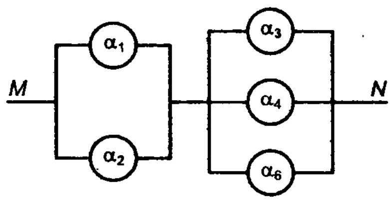
α_i	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5
p_i	0,1	0,2	0,5	0,3	0,6

5.4.



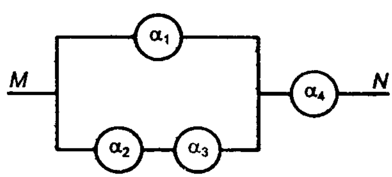
α_i	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6
p_i	0,3	0,6	0,1	0,4	0,5	0,2

5.5.



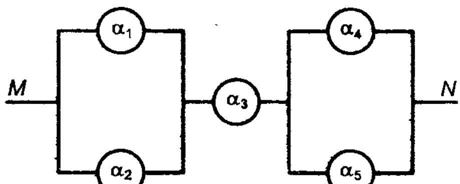
α_i	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5
p_i	0;3	0,6	0,5	0,4	0,2

5.6.



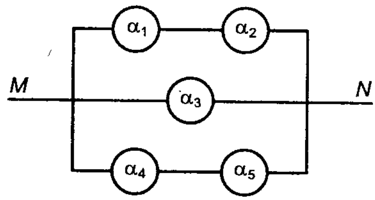
α_i	α_1	α_2	α_3	α_4
p_i	0,3	0,2	0,5	0,1

5.7.



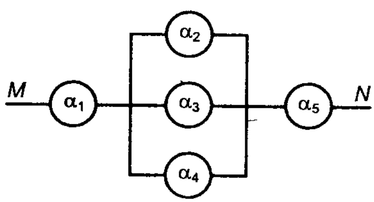
α_i	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5
p_i	0,4	0,5	0,1	0,2	0,3

5.8.



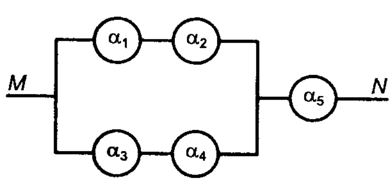
α_i	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5
p_i	0,1	0,3	0,5	0,4	0,2

5.9.



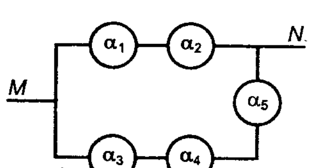
α_i	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5
p_i	0,4	0,5	0,6	0,3	0,1

5.10.



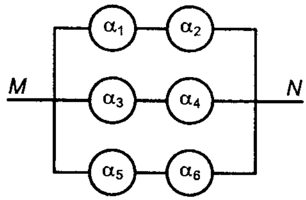
α_i	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5
p_i	0,4	0,2	0,3	0,6	0,5

5.11.



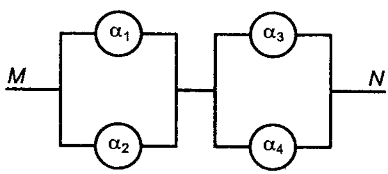
α_i	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5
p_i	0,1	0,5	0,2	0,3	0,4

5.12.



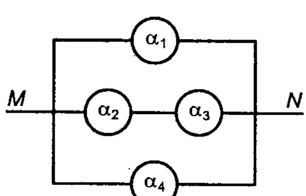
α_i	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6
p_i	0,3	0,5	0,1	0,4	0,6	0,2

5.13.



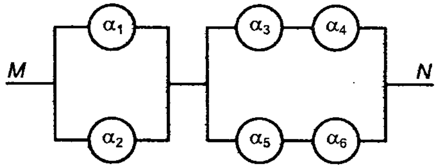
α_i	α_1	α_2	α_3	α_4
p_i	0,6	0,5	0,1	0,3

5.14.



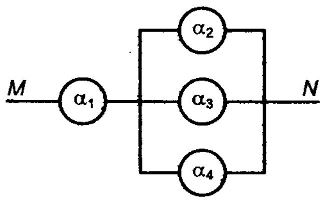
α_i	α_1	α_2	α_3	α_4
p_i	0,4	0,6	0,1	0,5

5.15.



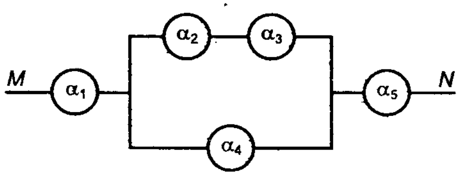
α_i	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6
p_i	0,2	0,4	0,1	0,3	0,6	0,5

5.16.



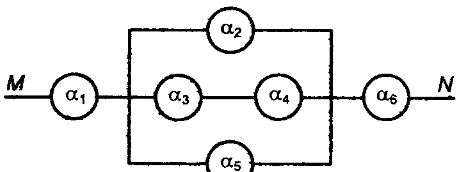
α_i	α_1	α_2	α_3	α_4
p_i	0,3	0,2	0,1	0,5

5.17.



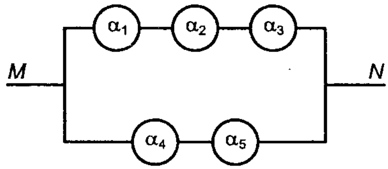
α_i	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5
p_i	0,2	0,5	0,1	0,6	0,4

5.18.



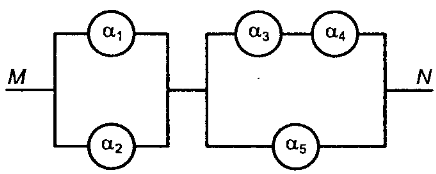
α_i	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6
p_i	0,5	0,6	0,1	0,3	0,4	0,2

5.19.



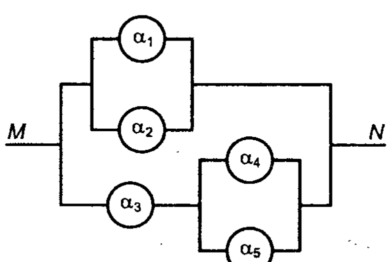
α_i	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5
p_i	0,2	0,5	0,1	0,6	0,4

5.20.



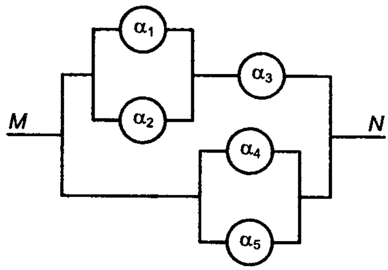
α_i	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5
p_i	0,5	0,2	0,3	0,4	0,1

5.21.



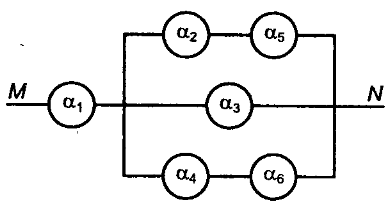
α_i	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5
p_i	0,2	0,5	0,1	0,6	0,4

5.22.



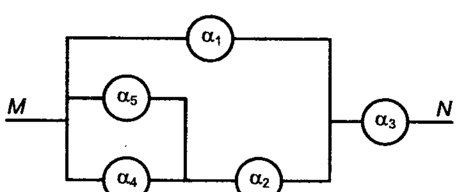
α_i	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5
p_i	0,4	0,5	0,6	0,3	0,1

5.23.



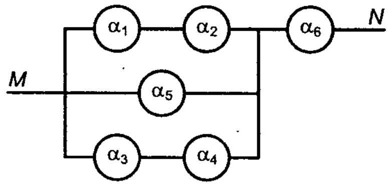
α_i	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6
p_i	0,3	0,5	0,1	0,4	0,6	0,2

5.24.



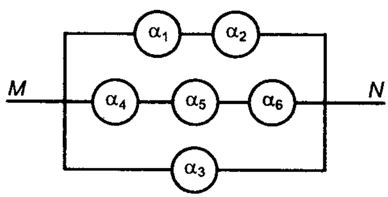
α_i	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5
p_i	0,1	0,3	0,5	0,4	0,2

5.25.



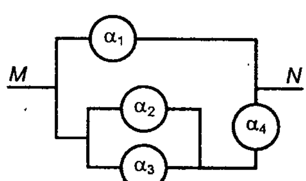
α_i	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6
p_i	0,3	0,6	0,1	0,4	0,5	0,2

5.26.



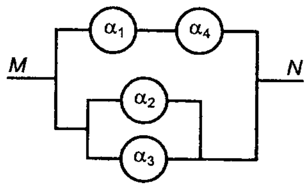
α_i	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6
p_i	0,2	0,3	0,6	0,4	0,1	0,5

5.27.



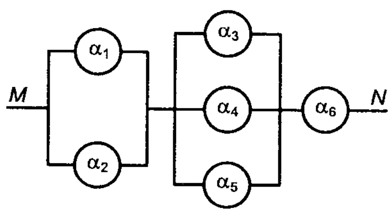
α_i	α_1	α_2	α_3	α_4
p_i	0,3	0,2	0,1	0,4

5.28.



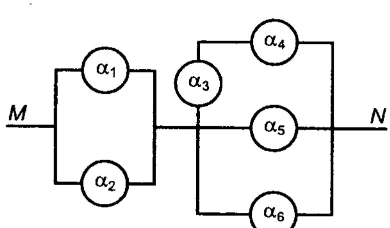
α_i	α_1	α_2	α_3	α_4
p_i	0,3	0,2	0,5	0,1

5.29.



α_i	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6
p_i	0,5	0,6	0,1	0,3	0,4	0,2

5.30.



α_i	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6
p_i	0,2	0,3	0,6	0,4	0,1	0,5

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

УЧЕБНИКИ И УЧЕБНЫЕ ПОСОБИЯ

1. *Березкина, Н.С.* Математика для инженеров. В 2 ч. Ч. 2 / Н.С. Березкина [и др.]; под ред Н.А. Микулика. Минск, 2006.

2. *Боровиков, А.А.* Теория вероятностей / А.А. Боровиков. М., 1986.

3. *Герасимович, А.И.* Математическая статистика / А.И. Герасимович. Минск, 1983.

4. *Гурский, Е.И.* Сборник задач по теории вероятностей и математической статистике / Е.И. Гурский. Минск, 1984.

5. *Гусак, А.А.* Высшая математика. В 2 ч. Ч. 2 / А.А. Гусак. Минск, 2005.

6. *Жевняк, Р.М.* Высшая математика. В 5 ч. Ч. 4, 5 / Р.М. Жевняк, А.А. Карпук. Минск, 1987, 1988.

7. *Коваленко, И.Н.* Теория вероятностей и математическая статистика / И.Н. Коваленко, А.А. Филиппова. М., 1982.

8. *Краснов, М.Л.* Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости (задачи и упражнения) / М.Л. Краснов, А.И. Киселев, Г.И. Макаренко. М., 1981.

9. *Меркин, Д.Р.* Введение в теорию устойчивости движения / Д.Р. Меркин. М., 1987.

10. *Микулик, Н.А.* Решение технических задач по теории вероятностей и математической статистике / Н.А. Микулик, Г.Н. Рейзина. Минск, 1991.

11. *Пискунов, Н.С.* Дифференциальное и интегральное исчисление. В 2 ч. Ч. 2 / Н.С. Пискунов. М., 1985.

12. *Розанов, Ю.А.* Теория вероятностей, случайные процессы и математическая статистика / Ю.А. Розанов. М., 1985.

13. Сборник задач по математике для втузов. Теория вероятностей и математическая статистика. В 4 ч. Ч. 4 / под ред. А.В. Ефимова. М., 1990.

14. Теория вероятностей и математическая статистика. Базовый курс с примерами и задачами / А.И. Кибзун [и др.]. М., 2002.

15. *Феллер, В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения: в 2 т. / В. Феллер. М., 1984.

16. *Чудесенко, В.Ф.* Сборник заданий по специальным курсам высшей математики. Типовые расчеты / В.Ф. Чудесенко. М., 1983.

ОГЛАВЛЕНИЕ